Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 27/01/2022

1) Calcolare la fattorizzazione LR della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

è la matrice dei coefficienti di un sistema lineare.
Studiare la convergenza dei metodi iterativi di Jacobi e di Gauss-Seidel al variare di α.

3) È data la tabella di valori

x	0	1
$f(x)$	1	3
$f'(x)$	1	6

Il polinomio $H(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$ è il polinomio di interpolazione di Hermite?

4) Si vuole approssimare l'integrale definito

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

utilizzando la formula di quadratura

$$J_2(f) = a_0 f(0) + a_1 f(1/2) + a_2 f(2/3).$$

Determinare i pesi a_0, a_1, a_2 in modo da ottenere il massimo grado di precisione. Indicare il grado di precisione ottenuto.

Soluzione

1) Risulta

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

2) Risultano

$$H_J = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad H_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori di H_J sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3} = \pm\alpha$. mentre gli autovalori di H_{GS} sono $\mu_{1,2} = 0$ e $\mu_3 = \alpha^2$.
Per entrambi i metodi, la condizione di convergenza è

$$|\alpha| \, < \, 1 \, .$$

3) Il polinomio dato (anche se verifica le condizioni di interpolazione) non è il polinomio di interpolazione di Hermite avendo grado 4 mentre dovrebbe avere al massimo grado 3.

4) Imponendo che la formula risulti esatta per $f(x) = 1, x, x^2$ si ottiene

$$a_0 = \frac{1}{4} \, , \quad a_1 = 0 \, , \quad a_2 = \frac{3}{4} \, .$$

Poiché la formula trovata non risulta esatta per $f(x) = x^3$, si ha che il grado di precisione è $m = 2$.