Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 12/01/2022

1) Determinare l'espressione dell'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y}\,.$$

2) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 0 \\ -\alpha & \alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

dire per quali valori reali di α risulta convergente.

3) È data la tabella di valori

x	0	2	1	-1
$f(x)$	-1	13	3α	α

, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Calcolare i valori reali di α per i quali il polinomio di interpolazione risulta di grado minimo.

4) Si vuole approssimare il valore dell'integrale

$$\int_1^2 \log(x)\,dx$$

utilizzando la formula dei trapezi. Indicare quanti sottointervalli sono necessari per avere una approssimazione con un massimo errore assoluto $|E| \leq 10^{-2}$.

Soluzione

1) Seguendo l'algoritmo $r_1 = x^2$, $r_2 = r_1/y$ si ha

$$\epsilon_f = \epsilon_{r_2} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + 2\epsilon_x - \epsilon_y$$

2) Risulta

$$A = \alpha\,(B+I) \quad \text{con} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di B sono $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \sqrt{2}$ e $\mu_3 = -\sqrt{2}$.
Segue che gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = \alpha\,, \quad \lambda_{2,3} = \alpha(1 \pm \sqrt{2})\,.$$

Quindi la matrice A risulta convergente se

$$|\alpha| \;<\; \frac{1}{1+\sqrt{2}} \;=\; \sqrt{2}-1\,.$$

3) Dal quadro delle differenze divisi si ricava che per $\alpha = 1$ si ha un polinomio di interpolazione di grado 2 ($P(x) = 3x^2 + x - 1$). Per tutti gli altri valori reali di α si hanno polinomi di grado 3.

4) Ponendo $f(x) = \log(x)$ risultano $f'(x) = 1/x$ e $f''(x) = -1/x^2$ per cui $M_2 = \sup_{x\in[1,2]} |f''(x)| \;=\; 1$. Imponendo che la maggiorazione dell'errore $\frac{1}{12\,k^2}M_2$ risulti inferiore a $\frac{10^{-2}}{2}$ si ha che il minimo numero k di intervalli con cui applicare la formula dei trapezi è

$$k \;=\; 5\,.$$