Test Telematico di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 13/01/2021

1) Determinare l'espressione dell'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{x+y}$$

2) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 11 & 81 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} .$$

La matrice A^{-1} risulta convergente?

3) È data l'equazione

$$x + e^x \;=\; 0 \,.$$

Indicare intervalli di separazione delle soluzioni reali della equazione.
Il metodo iterativo

$$x_i \;=\; -e^{x_{i-1}} \,, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots \;,$$

risulta idoneo per approssimare le soluzioni dell'equazione?

4) Si vuole approssimare il valore dell'integrale $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ utilizzando la formula

$$J_2(f) \;=\; a_0 f(-1) + a_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + a_2 f(1) \,.$$

Determinare i pesi a_0, a_1 e a_2 in modo da ottenere la formula con massimo grado di precisione. Indicare il grado di precisione ottenuto.

Soluzione

1) Seguendo l'algoritmo $r_1 = x\,y$, $r_2 = x + y$, $r_3 = r_1/r_2$ si ha

$$\epsilon_f = \epsilon_{r_3} = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \frac{y}{x+y}\epsilon_x + \frac{x}{x+y}\epsilon_y$$

2) Gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -7, \quad \lambda_4 = 5\,.$$

Segue che gli autovalori di A^{-1} sono

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = -\frac{1}{7}, \quad \mu_4 = \frac{1}{5}\,.$$

Essendo $\rho(A^{-1}) = 1$, risulta evidente che la matrice A^{-1} non è convergente.

3) Da una semplice sparazione grafica si deduce che l'equazione proposta ha una sola soluzione reale $\alpha \in]-1, -0.5[$.
Su tale intervallo, posto $\phi(x) = -e^x$, si ha $|\phi'(x)| < e^{-0.5} < 1$ per cui il metodo proposto risulta idoneo per approssimare la soluzione α.

4) Imponendo che la formula di quadratura proposta risulti esatta per $f(x) = 1, x, x^2$ si ha il sistema lineare

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_0 & + & a_1 & + & a_2 & = & 2 \\ -a_0 & + & \frac{1}{2}a_1 & + & a_2 & = & 0 \\ a_0 & + & \frac{1}{4}a_1 & + & a_2 & = & \frac{2}{3} \end{array}$$

la cui soluzione è

$$a_0 = \frac{5}{9}\,, \qquad a_1 = \frac{16}{9}\,, \qquad a_2 = -\frac{1}{3}\,.$$

La formula non risulta esatta per $f(x) = x^3$ per cui il grado di precisione è $m = 2$.