Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 24/02/2020

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 24/02/2020

1) Si vuole calcolare la funzione

$$f(x, y) = x/y$$

in un punto $P_0 \in D = [1, 3] \times [4, 5]$.
Si suppone di arrotondare il risultato dell'operazione alla 2^a cifra decimale e di introdurre i valori x e y con errori $|\delta_x| \leq 10^{-2}$ e $|\delta_y| \leq 10^{-2}$.
Quale è il massimo di $|\delta_f|$?

2) È dato un sistema lineare $Ax = b$ con matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Il metodo iterativo di Gauss-Seidel converge?

3) Determinare intervalli di separazione delle soluzioni della equazione

$$e^x + 2x - 2 = 0 .$$

Per ciascuna delle soluzioni indicare un punto iniziale che rende convergente il metodo di Newton.

4) È dato il sistema lineare sovradeterminato $Ax = b$ con matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & -\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$

Indicare i valori reali di α per i quali il sistema ha una unica soluzione nel senso dei minimi quadrati.

5) Per approssimare l'integrale $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_3(f) = a_0 f(x_0) + \frac{3}{4}\left(f\left(-\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)\right) + a_0 f(-x_0) .$$

Determinare il peso a_0 ed il nodo x_0 in modo da ottenere il massimo grado di precisione. Indicare il grado di precisione raggiunto.

Soluzione

1) Risultano $|\delta_a \leq \frac{1}{2}10^{-2}$, $A_x = \frac{1}{4}$ e $A_y = \frac{3}{16}$. Segue

$$|\delta_f| \ \leq \ \frac{1}{2}10^{-2} + \frac{1}{4}10^{-2} + \frac{3}{16}10^{-2} \ = \ \frac{15}{16}10^{-2} \ ,$$

2) La matrice di iterazione di Gauss-Seidel risulta

$$H_{GS} = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} .$$

I suoi autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \, , \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{2} \, ,$$

per cui il metodo risulta convergente.

3) Da una separazione grafica si evidenzia che l'equazione data ha una sola soluzione $\alpha \in [0,1]$.
Posto $f(x) = e^x + 2x - 2$, sull'intervallo $[0,1]$, si hanno $f'(x)$ e $f''(x)$ entrambe positive per cui il metodo di Newton converge sicuramente se si sceglie $x_0 = 1$.

4) Affinché il sistema abbia una unica soluzione nel senso dei minimi quadrati, la matrice A deve risultare di rango massimo. Guardando i tre minori di ordine 2 estraibili da A, si conclude che il rango risulta uguale a 2 per $\alpha \neq 0$.

5) Imponendo che la formula risulti esatta per $f(x) = 1, x, x^2$ si ottiene

$$a_0 = \frac{1}{4} \, , \qquad x_0 = \pm 1 \, .$$

La formula ottenuta risulta esatta anche per $f(x) = x^3$ ma non per $f(x) = x^4$ per cui il grado di precisione è $m = 3$.