Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 20/02/2019

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 20/02/2019

1) Si determini l'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x,y) = \frac{x-y}{y} \, .$$

2) Una matrice $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ ha raggio spettrale $\rho(A) = 4/5$.
La matrice A può avere il polinomio

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 1/2$$

come polinomio caratteristico?

3) L'equazione

$$e^{-x} - x^2 + 2x = 0$$

ha una soluzione $\alpha \in [2,3]$. Individuare un valore iniziale x_0 partendo dal quale il metodo di Newton converge ad α.

4) È dato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Per quali valori reali di α il sistema ha una unica soluzione nel senso dei minimi quadrati?

5) Per approssimare l'integrale $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$ si utilizza la formula

$$J_1(f) = a_1 f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} f(x_0) \, .$$

Determinare il peso a_1 ed il nodo x_0 in modo da ottenere il massimo grado di precisione possibile. Indicare il grado di precisione raggiunto.

Soluzione

1) Considerando l'algoritmo

$$r_1 = x - y\,, \quad r_2 = \frac{r_1}{x}\,,$$

si ottiene l'espressione dell'errore relativo

$$\epsilon_f = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{x}{x-y}\left(\epsilon_x - \epsilon_y\right)\,.$$

2) Dalla ipotetica equazione caratteristica si deduce $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 6$. Poiché

$$\left|\sum_{i=1}^{4} \lambda_i\right| \leq \sum_{i=1}^{4} |\lambda_i| \leq 4\rho(A) = \frac{16}{5} = 3.2$$

risulta che l'equazione data non può essere l'equazione caratteristica.

3) Posto $f(x) = e^{-x} - x^2 + 2x$ si ha $f'(x) = -e^{-x} - 2x + 2$ e $f''(x) = e^{-x} - 2$. Nell'intervallo assegnato risultano $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ per cui un punto di partenza a partire dal quale il metodo di Newton converge è $x_0 = 3$.

4) La matrice dei coefficienti ha rango 2 (e quindi il sistema ha una unica soluzione nel senso dei minimi quadrati) per $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5) Imponendo che la formula risulti esatta per $f(x) = 1, x$ si ottiene $a_1 = \frac{1}{2}$ e $x_0 = \frac{2}{3}$. La formula ottenuta non è esatta per $f(x) = x^2$ per cui il grado di precisione ottenuto è $m = 1$.