Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 21/02/2018

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 21/02/2018

1) Si determini l'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x}\,.$$

2) Una matrice $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ ha autovalori

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{5}, \quad \lambda_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\,.$$

La matrice A verifica le condizioni per la applicazione del metodo delle potenze? La matrice A^{-1} verifica le condizioni per la applicazione del metodo delle potenze?

3) Risolvere l'equazione $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$.
Il metodo di bisezione risulta convergente se utilizzato (su intervalli opportuni) per approssimare le soluzioni di tale equazione?

4) Determinare i numeri reali α per i quali risulta di grado minimo il polinomio che interpola i dati riportati nella tabella che segue:

x	0	α	-2	2
$f(x)$	-2α	0	12	8

, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$.

5) Per approssimare l'integrale $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \; (= \log 2)$ si utilizza la formula dei trapezi.
In quanti sottointervalli si deve suddividere l'intervallo di integrazione per ottenere una approssimazione con massimo errore assoluto $|E| \leq 10^{-2}$?

Soluzione

1) Considerando l'algoritmo

$$r_1 = x + y \, , \quad r_2 = \frac{r_1}{x} \, ,$$

si ottiene l'espressione dell'errore relativo

$$\epsilon_f = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{y}{x+y} \left(\epsilon_y - \epsilon_x \right) \, .$$

2) Applicato alla matrice A il metodo delle potenze non converge non avendo un solo autovalore (eventualmente di molteplicià maggiore di 1) di modulo massimo ($|\lambda_1| = |\lambda_4|$ e $\lambda_1 \neq \lambda_4$).
La matrice A^{-1} ha un solo autovalore di modulo massimo $1/\lambda_3$.

3) L'equazione data ha soluzioni

$$\alpha_1 = 1 \, , \quad \alpha_2 = -1 \, , \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 2 \, .$$

Il metodo di bisezione (applicato su intervalli opportuni) converge per approssimare α_1 e α_2 (radici sempici) ma non per approssimare α_3 (radice di molteplicità 2).

4) Dal quadro delle differenze divise si ricava che il polinomio di interpolazione risulta di grado minimo (grado=2) se $\alpha = 1$ o $\alpha = -6$.

5) Essendo $f''(x) = 2(x+1)^{-3}$ si ha $M_2 = sup_{x \in [0,1]} |f''(x)| = 2$. Imponendo che l'errore commesso nel sostituire l'integrale esatto con la formula di quadratura dei trapezi non superi $\frac{1}{2}10^{-2}$, si ricava che si devono utilizzare almeno 6 (sei) sottointervalli.