Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 22/02/2017

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 22/02/2017

1) Si vuole calcolare la funzione

$$f(x,y) = x - y$$

in un punto $P_0 \in [1,2] \times [0,1]$.
Per avere un errore assoluto $|\delta_f| \leq 10^{-3}$, quali limitazioni devono soddisfare l'errore assoluto algoritmico $|\delta_a|$ e gli errori assoluti $|\delta_x|$ e $|\delta_y|$?

2) Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La matrice soddisfa le ipotesi di convergenza del metodo delle potenze?

3) Una matrice A ha raggio spettrale $\rho(A) = 3$. Dire quali delle seguenti affermazioni si può realizzare

a) $\|A\|_2 = 3$;

b) $\|A^{-1}\|_2 \geq \rho(A)$;

c) $\|A^2\|_2 \leq 5$;

d) $\rho(A^2) = 6$.

4) È data l'equazione

$$2x^2 + 2 - Ke^{-x} = 0\,, \qquad K \in \mathbb{R}\,.$$

Determinare I valori reali K per i quali si hanno soluzioni di molteplicità maggiore di uno indicando il valore di tali radici.

5) Per approssimare l'integrale $I = \int_{-1}^{1} x^4 f(x)dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_1(f) = a_0 f(1) + a_1 f(-1)\,.$$

Determinate i pesi a_0 e a_1 per i quali si ha il massimo grado di precisione. Si indichi il grado di precisione ottenuto.

Soluzione

1) Suddividendo l'errore totale in parti uguali, si ha $|\delta_a| \leq \frac{1}{2}10^{-3}$ (si arrotonda il risultato della operazione alla terza cifra decimale). Essendo $A_x = A_y = 1$ basta porre $|\delta_x|$ e $|\delta_y|$ entrambi minori di $\frac{1}{4}10^{-3}$ (si troncano i dati alla quarta cifra decimale).

2) Gli autovalori della matrice sono

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = 4\,.$$

La matrice risulta diagonalizzabile (ha autovalori due a due distinti) ed ha un autovalore di modulo dominante (λ_4) per cui le ipotesi del metodo delle potenze sono verificate.

3) Si verifica che a) e b) si possono verificare mentre risultano impossibili le affermazioni c) e d).

4) Uguagliando a zero la funzione $2x^2+2-Ke^{-x}$ e la sua derivata, si ricava che si hanno soluzioni di molteplicità maggiore di 1 se $K = 4/e$ ottenendo la radice doppia $x = -1$.

5) Imponendo che la formula proposta sia esatta per per $f(x) = 1$ e $f(x) = x$ si ottengono i pesi $a_0 = a_1 = \frac{1}{5}$. La formula non risulta esatta per $f(x) = x^2$ per cui il gardo di precisione ottenuto è $m = 1$.