Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 01/07/09

1) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & \alpha^2+1 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} , \quad \alpha \in R\,.$$

a) Indicare i valori reali di α per cui A risulta invertibile.

b) Calcolare la matrice A^{-1}.

c) Determinare i valori reali di α per i quali converge la matrice di iterazione di Jacobi.

d) Determinare i valori reali di α per i quali converge la matrice di iterazione di Gauss-Seidel.

2) Una catena di markov ha la matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

a) La catena risulta riducibile?

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare la/e distribuzione/i limite.

d) Calcolare le probabilità di assorbimento.

e) Calcolare i tempi medi di assorbimento.

f) Posto $p^{(0)} = (0, 0, 1, 0)$, calcolare $p^{(3)}$.

3) Una urna A contiene 3 palline gialle e 4 palline nere. Una seconda urna B contiene 2 palline gialle e 5 palline nere.
Si estrae una pallina da un'urna a caso e si inserisce nell'altra urna. Si procede ad una nuova estrazione dalla seconda urna.

a) Quale è la probabilità di estrarre due palline dello stesso colore?

b) Quale è la probabilità che la seconda pallina estratta sia nera?

c) Quale è la probabilità di estrarre la seconda gialla dopo averne estratta una nera?

SOLUZIONE

1) Il determinante della matrice A è $\det(A) = \alpha^4(\alpha^2-1)$ per cui A risulta invertibile se $\alpha \neq 0, 1, -1$.
Applicando il metodo di Gauss-Jordan si ottiene

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha^2(\alpha^2-1)} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} .$$

La matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel sono, rispettivamente,

$$H_J = \begin{pmatrix} 0 & 1/\alpha & 0 \\ \alpha/(\alpha^2+1) & 0 & \alpha/(\alpha^2+1) \\ 0 & 1/\alpha & 0 \end{pmatrix}, H_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1/(\alpha^2+1) & \alpha/(\alpha^2+1) \\ 0 & 1/(\alpha(\alpha^2+1)) & 1/(\alpha^2+1) \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di H_J sono

$$\lambda_1 = 0\,, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{2}{\alpha^2+1}}\,, \quad \lambda_3 = -\sqrt{\frac{2}{\alpha^2+1}}\,,$$

per cui il metodo di Jacobi converge se $|\alpha| > 1$.
Gli autovalori di H_{GS} sono

$$\lambda_1 = 0\,, \quad \lambda_2 = 0\,, \quad \lambda_3 = \frac{2}{\alpha^2+1}\,,$$

per cui il metodo di Gauss-Seidel converge se $|\alpha| > 1$.

2) Indicando con E_i, $i = 1, 2, 3, 4$, i quattro stati, la matrice T (quindi la catena) risulta riducibile e si ha una classe chiusa $\mathcal{C} = \{E_1, E_4\}$ e gli stati transitori $\tau = \{E_2, E_3\}$.
Si ha un sola distribuzione limite che verifica $\pi = \pi T$ data da

$$\pi = (1/2, 0, 0, 1/2)\,.$$

Le probabilità di assorbimento sono (ovviamente)

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1\,.$$

I tempi medi di assorbimento sono dati dalla soluzione del sistema lineare

$$\begin{aligned} \eta_2 \qquad\qquad &= 1 \\ \tfrac{1}{3}\eta_2 + \tfrac{1}{3}\eta_3 + 1 &= \eta_3 \end{aligned}$$

che è

$$\eta_2 = 1\,, \qquad \eta_3 = 2\,.$$

Partendo con la distribuzione $p^{(0)} = (0, 0, 1, 0)$ si ha $p^{(1)} = \frac{1}{3}(0, 1, 1, 1)$, $p^{(2)} = \frac{1}{18}(9, 2, 2, 5)$ e $p^{(3)} = \frac{1}{54}(27, 2, 2, 23)$.

3) Indichiamo con i pedici $1, 2, 1A, 1B, 2A, 2B$ l'estrazione di una pallina gialla G o nera N alla prima, alla seconda estrazione dall'urna A o dall'urna B.
Risulta

$$P(G_{1A}) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{7} = \frac{3}{14}\,, \qquad P(G_{1B}) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{7} = \frac{2}{14}\,,$$

$$P(N_{1A}) = \frac{1}{2}\,\frac{4}{7} = \frac{4}{14}\,, \qquad P(N_{1B}) = \frac{1}{2}\,\frac{5}{7} = \frac{5}{14}\,.$$

La probabilità di estrarre due palline dello stesso colore è

$$P\left((G_1 \cap G_2) \cup (N_1 \cap N_2)\right) = P(G_1 \cap G_2) + P(N_1 \cap N_2)\,.$$

Da

$$\begin{aligned}
P(G_1 \cap G_2) &= P(G_2|G_1)P(G_1) \\
&= P(G_{2B}|G_{1A})P(G_{1A}) + P(G_{2A}|G_{1B})P(G_{1B}) \\
&= \frac{3}{8}\,\frac{3}{14} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{14} = \frac{17}{112}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(N_1 \cap N_2) &= P(N_2|N_1)P(N_1) \\
&= P(N_{2B}|N_{1A})P(N_{1A}) + P(N_{2A}|N_{1B})P(N_{1B}) \\
&= \frac{3}{4}\,\frac{4}{14} + \frac{5}{8}\,\frac{5}{14} = \frac{7}{16}
\end{aligned}$$

si ha

$$P\left((G_1 \cap G_2) \cup (N_1 \cap N_2)\right) = \frac{33}{56}\,.$$

Inoltre risulta

$$\begin{aligned}
P(N_2) &= P\left((N_2 \cap G_1) \cup (N_2 \cap N_1)\right) \\
&= P(N_2 \cap G_1) + P(N_2 \cap N_1) \\
&= P(N_{2B}|G_{1A})P(G_{1A}) + P(N_{2A}|G_{1B})P(G_{1B}) + \frac{49}{112} \\
&= \frac{5}{8}\,\frac{3}{14} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{14} + \frac{49}{112} = \frac{9}{14}\,.
\end{aligned}$$

Infine, essendo

$$\begin{aligned}
P(G_2 \cap N_1) &= P(G_{2B}|N_{1A})P(N_{1A}) + P(B_{2A}|N_{1B})P(N_{1B}) \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{4}{14} + \frac{3}{8}\,\frac{5}{14} = \frac{23}{112}\,,
\end{aligned}$$

si ha

$$P(G_2|N_1) = \frac{P(G_2 \cap N_1)}{P(N_1)} = \frac{23}{122} \cdot \frac{14}{9} = \frac{23}{72}\,.$$