Dipartimento di Matematica Applicata

“Ulisse Dini”

Metodi Matematici per l’Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell’Automazione 18/07/07

1) È data l’equazione
$$2\sqrt{|x|} - x^2 + 2x + 3 = 0 \,.$$

a) Determinare il numero delle radici reali e per ognuna di esse indicare un intervallo di separazione.

b) Studiare la convergenza del metodo iterativo
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 - 3 - 2\sqrt{|x_n|}) \,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

c) Indicare valori iniziali x_0 che rendono convergente il metodo di Newton.

2) Consideriamo i 4 vertici di un quadrato ed il suo baricentro. Un topolino si muove attraverso questi 5 punti nel seguente modo: se si trova in uno dei vertici si sposta nel baricentro mentre se si trova nel baricentro ha uguale probabilità di rimanere fermo o di andare in uno qualunque dei vertici.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare la/e distribuzione/i limite.

d) Partendo da uno dei quattro vertici del quadrato qual è la probabilità di tornare nello stesso vertice dopo tre passi della catena?

3) Due variabili X e Y hanno la seguente densità congiunta

		Y			
		-1	0	1	2
X	0	1/12	1/12	0	2/12
	1	0	3/12	1/12	2/12
	2	1/24	1/24	1/12	0

a) Calcolare le densità marginali.

b) Calcolare $E[X]$, $E[Y]$, $Var(X)$ e $Var(Y)$.

c) Calcolare $Cov(X,Y)$ indicando se le due varabili risultano indipendenti.

Soluzione

1) Con una semplice separazione grafica si deduce che l'equazione ha due radici reali $\alpha_1 \in I_1 = [-2, -1.5]$, $\alpha_2 \in I_2 = [3, 4]$.
Sia $\phi(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3 - 2\sqrt{|x|})$ la funzione di iterazione del metodo proposto. Risultano

$$\phi'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2}\left(2x + \frac{1}{\sqrt{-x}}\right) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e

$$\phi''(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{4\sqrt{x^3}} & \text{se } x > 0 \\ 1 + \frac{1}{4\sqrt{-x^3}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Si osserva che sugli intervalli di separazione trovati la derivata seconda della funzione $\phi(x)$ è positiva per cui la derivata prima risulta crescente. Valutando quest'ultima negli estremi dei due intervalli si ricava $|\phi'(x)| > 1$ per cui non è assicurata la convergenza del metodo.
Ponendo $f(x) = 2\sqrt{|x|} - x^2 + 2x + 3$ si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - 2x + 2, & x > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-x}} - 2x + 2 & x < 0 \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} - 2 & x > 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x^3}} - 2 & x < 0 \end{cases}.$$

Sull'intervallo I_1 si ha $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ per cui $x_0 = -2$ risulta un buon punto di partenza per il metodo di Newton.
Su I_2 si ha $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ per cui $x_0 = 4$ soddisfa la nostra richiesta.
($\alpha_1 \simeq -1.544708$, $\alpha_2 \simeq 3.811515$)

2) Indicando con E_i, $i = 1, 2, 3, 4$ i quattro vertici e con E_5 il baricentro del quadrato, la matrice di transizione della catena è

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Non si presentano classi chiuse per cui tutti gli stati sono transitori (o ricorrenti).
Si ha una unica distribuzione limite

$$\pi = \pi T = \frac{1}{9}(1, 1, 1, 1, 5)\,.$$

Possiamo scegliere uno qualunque dei vertici per cui supponiamo di partire dal primo vertice. Quindi da $p^{(0)} = (1, 0, 0, 0, 0)$ si ha $p^{(1)} = p^{(0)}T = (0, 0, 0, 0, 1)$, $p^{(2)} = p^{(1)}T = \frac{1}{5}(1, 1, 1, 1, 1)$, $p^{(3)} = p^{(2)}T = \frac{1}{25}(1, 1, 1, 1, 21)$. La probabilità cercata è $\frac{1}{25}$.

3) Le densità marginali sono

$$f_X(x) = \begin{cases} 4/12 & \text{se } x = 0 \\ 6/12 & \text{se } x = 1 \\ 2/12 & \text{se } x = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 3/24 & \text{se } y = -1 \\ 9/24 & \text{se } y = 0 \\ 4/24 & \text{se } y = 1 \\ 8/24 & \text{se } y = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Seguono i valori

$$E[X] = \frac{5}{6}\ ,\ E[X^2] = \frac{7}{6}\ ,\ E[Y] = \frac{17}{24}\ ,\ E[Y^2] = \frac{39}{24}\ ,$$

da cui

$$Var(X) = \frac{17}{36}\ , \quad Var(Y) = \frac{647}{576}\ .$$

Considerando la v.a. $Z = XY$ questa ha densità di probabilità

$$f_Z(z) = \begin{cases} 15/24 & \text{se } z = 0 \\ 1/24 & \text{se } z = -2 \\ 1/12 & \text{se } z = 1 \\ 3/12 & \text{se } z = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \ .$$

Essendo $E[XY] = E[Z] = \frac{1}{2}$ si ha $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = -\frac{13}{144}$ per cui le due variabili sono dipendenti.