



- 1) È data la tabella di valori

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & \alpha & -1 & 3 \\ \hline f(x) & 2 & 1 & 4 & 3\alpha + 1 & 11 \end{array}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Determinare α in modo che il polinomio di interpolazione risulti di grado minimo.

Approssimare i valori $\bar{x}$ per i quali $f(\bar{x}) = 3$.

- 2) Una catena di Markov ha la seguente matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 7/8 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \\ 2/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- a) Dire se la catena risulta riducibile e classificarne gli stati.
- b) Determinare le distribuzioni limite.
- c) Calcolare le probabilità di assorbimento.
- d) Calcolare i tempi medi di assorbimento.

- 3) Due variabili aleatorie X e Y hanno la densità di probabilità congiunta

$$f(x, y) = \begin{cases} K(x + y) & \text{se } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- a) Determinare la costante reale K .
- b) Le due variabili sono indipendenti?
- c) Calcolare la densità $f_{Y|X}(y|x)$.
- d) Determinare $P(y < x - \frac{1}{4}x^2)$.

SOLUZIONE

- 1) Si costruisce il quadro delle differenze divise

x	$f(x)$	$DD1$	$DD2$
0	2		
1	1	-1	
3	11	3	2
-1	$3\alpha + 1$	$1 - 3\alpha$	$(3\alpha - 2)/2$
α	4	$2/\alpha$	$(2 + \alpha)/(\alpha(\alpha - 1))$

L'ultima colonna risulta costante per $\alpha = 2$ ed il polinomio di interpolazione ha grado 2. Svolgendo i calcoli si ottiene $P_4(x) = 2x^2 - 3x + 2$.

I valori $\bar{x}$ per i quali $f(\bar{x}) = 3$ si approssimano risolvendo l'equazione $P_4(x) = 3$ data da $2x^2 - 3x - 1 = 0$ per cui $\bar{x} \simeq \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$.

- 2) La catena risulta riducibile con due classi chiuse. Gli stati E_2, E_4 sono transitori, lo stato E_3 è uno stato assorbente e costituisce la classe chiusa $C^{(1)}$, gli stati E_1, E_5 costituiscono una seconda classe chiusa $C^{(2)}$.

Le distribuzioni limite sono date dalle soluzioni del sistema $\pi = \pi T$ con la condizione $0 \leq \pi_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, e $\sum_{i=1}^5 \pi_i = 1$ per cui

$$\pi^{(1)} = (0, 0, 1, 0, 0), \quad \pi^{(2)} = \frac{1}{5}(4, 0, 0, 0, 1).$$

Le probabilità di assorbimento (relative agli stati transitori) sono

$$\lambda_2^{(1)} = \frac{1}{4}, \quad \lambda_4^{(1)} = \frac{1}{8}, \quad \lambda_2^{(2)} = \frac{3}{4}, \quad \lambda_4^{(2)} = \frac{7}{8}.$$

I tempi medi di assorbimento sono

$$\eta_2 = \frac{5}{4}, \quad \eta_4 = \frac{17}{8}.$$

- 3) La costante K si determina imponendo $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ per cui $K = 1/3$.

Le densità marginali sono

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{1}{3}(x+y) dy = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}, \quad f_Y(y) = \int_0^2 \frac{1}{3}(x+y) dx = \frac{2}{3}(1+y).$$

Le due variabili risultano dipendenti essendo $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

Risulta

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{3}(x+y)}{\frac{1}{6}(2x+1)} = \frac{2(x+y)}{2x+1}.$$

La probabilità richiesta è

$$\begin{aligned}P\left(y < x - \frac{1}{4}x^2\right) &= \int_0^2 dx \int_0^{x-x^2/4} f(x,y)dy \\&= \int_0^2 dx \int_0^{x-x^2/4} \frac{1}{3}(x+y)dy \\&= \frac{1}{3} \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{x-x^2/4} dx \\&= \frac{1}{3} \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{32}x^4\right) dx \\&= \frac{11}{15} .\end{aligned}$$