Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **23/06/04**

1) É data la formula di quadratura

$$J_2(f) = a_0 f(x_0) + a_1 f(0) + a_2 f(x_2)$$

per approssimare il valore di $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.
Determinare i pesi a_0, a_1, a_2 ed i nodi x_0, x_2 in modo che la formula abbia grado di precisione algebrico massimo indicando il grado raggiunto.

2) Una persona si reca ogni giorno nello stesso bar e beve una cosa tra superalcolico, analcolico, caffé e acqua minerale.
La scelta viene effettuata basandosi sulla consumazione del giorno precedente e lanciando un dado (non truccato) a 6 (sei) facce.
Indicato con D il valore ottenuto con il lancio del dado, se il giorno precedente ha bevuto

superalcolico : ordina un ANALCOLICO se $D \leq 3$, un CAFFÉ se $4 \leq D \leq 5$, ACQUA MINERALE se $D = 6$;

analcolico : ordina un SUPERALCOLICO se $D = 1$, un CAFFÉ se $2 \leq D \leq 5$, ACQUA MINERALE se $D = 6$;

caffé : ordina un SUPERALCOLICO se $1 \leq D \leq 2$, un ANALCOLICO se $D = 3$, ACQUA MINERALE se $4 \leq D$;

acqua minerale : ordina un SUPERALCOLICO se $1 \leq D \leq 3$, un ANALCOLICO se $4 \leq D$.

a) Scrivere la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Se oggi la persona ha ordinato un analcolico, qual é la probabilitá che tra 1000 giorni ordini un caffé?

3) Due tiratori sparano un colpo ciascuno su un medesimo bersaglio.
La probabilitá che il primo tiratore colpisca il bersaglio é 0.8, quella del secondo tiratore é 0.4.
Il bersaglio é colpito una sola volta.
Trovare la probabilitá che il bersaglio sia stato colpito dal primo tiratore.

Soluzione

1) Si impone che la formula risulti esatta per $f(x) = 1, x, x^2, x^3, x^4$ ottenendo il sistema non lineare

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 + a_2 & = & 2 \\ a_0x_0 + a_2x_2 & = & 0 \\ a_0x_0^2 + a_2x_2^2 & = & 2/3 \\ a_0x_0^3 + a_2x_2^3 & = & 0 \\ a_0x_0^4 + a_2x_2^4 & = & 2/5 \end{array}\right. .$$

Imponendo che siano verificate tutte le equazioni del sistema si ha la soluzione

$$a_0 = a_2 = \frac{5}{9}, \quad a_1 = \frac{8}{9}, \quad x_0 = -x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Si verifica che con tali valori la formula é esatta anche se $f(x) = x^5$ mentre non lo é se $f(x) = x^6$ per cui il grado di precisione raggiunto é 5.

2) Indicando con $E_1 = \{\text{superalcolico}\}$, $E_2 = \{\text{analcolico}\}$, $E_3 = \{\text{caffé}\}$, $E_4 = \{\text{acqua minerale}\}$, la matrice di transizione della catena é

$$T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli stati sono tutti transitori (o ricorrenti).
La distribuzione limite che verifica il sistema $\pi = \pi T$ é

$$\pi = \frac{1}{284}(69, 78, 75, 62)$$

per cui la probabilitá cercata é $\frac{75}{284}$.

3) Indichiamo con C_i, $i = 1, 2$, l'evento in cui il tiratore i-esimo colpisce il bersaglio e con S_i, $i = 1, 2$, l'evento in cui il tiratore i-esimo sbaglia il colpo.
Risulta

$$P(C_1) = 0.8\,, \quad P(C_2) = 0.4\,, \quad P(S_1) = 0.2\,, \quad P(S_2) = 0.6\,.$$

Segue che il bersaglio é colpito una sola volta in due casi: precisamente

$$P(C_1, S_2) = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48\,, \quad P(C_2, S_1) = 0.4 \cdot 0.2 = 0.08\,.$$

Indicato con $X = \{\text{il bersaglio é colpito una sola volta}\}$, applicando il teorema di Bayes si ottiene

$$\begin{aligned} P(C_1, S_2 \mid X) &= \frac{P(X \mid C_1, S_2) \cdot P(C_1, S_2)}{P(X \mid C_1, S_2)P(C_1, S_2) + P(X \mid C_2, S_1)P(C_2, S_1)} \\ &= \frac{1 \cdot 0.48}{1 \cdot 0.48 + 1 \cdot 0.08} \\ &= \frac{0.48}{0.56} = \frac{6}{7}\,. \end{aligned}$$