Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **26/06/03**

1) É data la tabella di valori

x	-1	0	2	α	1
$f(x)$	14	9	5	2α	6

, $\alpha \in R$.

Determinare i valori reali di α per i quali il polinomio di interpolazione risulta di grado minimo.

2) Di una catena di Markov é data la matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) La catena risulta riducibile?

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare le probabilitá di assorbimento.

d) Determinare i tempi medi di assorbimento.

3) A e B sono due eventi con $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ e $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$. Determinare $P(A|B)$ e $P(B|A)$.

Soluzione

1) Si costruisce il quadro delle differenze divise escludendo il punto $(\alpha, 2\alpha)$ ottenendo la tabella

x	$f(x)$	$DD1$	$DD2$
-1	14	$-$	$-$
0	9	-5	$-$
2	5	-3	1
1	6	-4	1

.

Il polinomio di interpolazione é $P_3(x) = x^2 - 4x + 9$.
Affinché aggiungendo il punto escluso in precedenza si abbia lo stesso polinomio di interpolazione, α deve essere tale da soddisfare l'equazione $P_3(x) = 2x$. Quindi i valori cercati sono le soluzioni dell'equazione $x^2 - 6x + 9 = 0$ che ha la soluzione $\alpha = 3$ con molteplicitá 2.

2) La catena proposta é riducibile.
Il terzo stato é assorbente, mentre gli altri tre stati sono transitori.
Le probabilitá di assorbimento partendo da uno qualunque degli stati transitori é uguale a 1 avendo la catena di Markov una sola classe chiusa composta dallo stato assorbente. Le probabilitá cercate sono, in ogni caso, la soluzione del sistema lineare

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \tfrac{1}{3}\lambda_1 + \tfrac{1}{6}\lambda_2 + \tfrac{1}{2}\lambda_4 \\
\lambda_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\lambda_2 + \tfrac{1}{4}\lambda_4 \\
\lambda_4 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{6}\lambda_1 + \tfrac{1}{6}\lambda_2
\end{aligned}$$

che risulta (come previsto)

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = 1\,, \quad \lambda_4 = 1\,.$$

I tempi medi di assorbimento sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= 1 + \tfrac{1}{3}\eta_1 + \tfrac{1}{6}\eta_2 + \tfrac{1}{2}\eta_4 \\
\eta_2 &= 1 + \tfrac{1}{4}\eta_2 + \tfrac{1}{4}\eta_4 \\
\eta_4 &= 1 + \tfrac{1}{6}\eta_1 + \tfrac{1}{6}\eta_2
\end{aligned}$$

che é data da

$$\eta_1 = \frac{99}{29} \simeq 3.41\,, \quad \eta_2 = \frac{57}{29} \simeq 1.96\,, \quad \eta_4 = \frac{55}{29} \simeq 1.89\,.$$

3) Dalla relazione $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ si ricava

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\,.$$

Seguono le probabilitá condizionate

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{5}\,, \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3}\,.$$