



- 1) Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dopo aver verificato se risulta riducibile ed (eventualmente) averla ridotta.

- 2) Una persona gioca alla roulette puntando esclusivamente sul ROSSO (R), sul NERO (N) o sull'insieme dei numeri DISPARI (D) e non facendo mai due puntate consecutive uguali tra loro.
Le probabilità con cui sceglie la puntata da effettuare in funzione della puntata precedente sono le seguenti:

$$P(N|R) = \frac{1}{3}, \quad P(D|R) = \frac{2}{3}, \quad P(R|N) = \frac{1}{2},$$

$$P(D|N) = \frac{1}{2}, \quad P(R|D) = \frac{5}{6}, \quad P(N|D) = \frac{1}{6}.$$

- a) Determinare la matrice di transizione della catena di Markov.
 - b) Classificare gli stati della catena di Markov.
 - c) Se la prima puntata è stata fatta sui numeri dispari, qual è la probabilità che la terza puntata sia uguale alla prima?
 - d) Determinare la distribuzione limite.
- 3) Due variabili aleatorie X e Y hanno la seguente funzione di densità congiunta

$$f(x, y) = \begin{cases} K(4 - 2x - y) & \text{se } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - 2x, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- a) Determinare la costante reale K .
- b) Calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.
- c) Calcolare la densità condizionale $f_{Y|X}(y|x)$.
- d) Calcolare $P(Y \geq X)$.

SOLUZIONE

- 1) La matrice è riducibile ed utilizzando la matrice $P = (e^{(1)}|e^{(3)}|e^{(5)}|e^{(2)}|e^{(4)}|e^{(6)})$ si ottiene

$$B = P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & O \\ O & C \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di A sono gli stessi della matrice B . Gli autovalori di B sono dati dagli autovalori del blocco $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ con molteplicità raddoppiata.

L'equazione caratteristica di C è $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 15\lambda - 18 = 0$ per cui gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}, \lambda_5 = \lambda_6 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}.$$

- 2) La matrice di transizione, indicando gli stati della catena con $E_1 = R$, $E_2 = N$ e $E_3 = D$, è

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 5/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli stati sono tutti transitori.

Posto $\pi^{(0)} = (0, 0, 1)$, si ottiene $\pi^{(1)} = (5/6, 1/6, 0)$ e $\pi^{(2)} = (1/12, 5/18, 23/36)$ per cui la probabilità cercata è $\frac{23}{36}$.

La distribuzione limite è $\pi = \frac{1}{79}(33, 16, 30)$.

- 3) La costante K si determina imponendo $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$. Da

$$\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} f(x, y) dy = \frac{16}{3}$$

si ottiene $K = 3/16$.

Con semplici calcoli si ricavano le densità marginali

$$f_X(x) = \int_0^{4-2x} f(x, y) dy = \frac{3}{16}(8 - 8x + 2x^2) = \frac{3}{8}(2 - x)^2,$$

$$f_Y(y) = \int_0^{(4-y)/2} f(x, y) dx = \frac{3}{64}(16 - 8y + y^2) = \frac{3}{64}(4 - y)^2.$$

Da queste si ricava

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{4-2x-y}{8-8x+2x^2} .$$

La probabilità richiesta é

$$\begin{aligned} P(Y \geq X) &= \int_0^{4/3} dx \int_x^{4-2x} f(x,y) dy \\ &= \frac{3}{16} \int_0^{4/3} (8-12x+\frac{9}{2}x^2) dx \\ &= \frac{2}{3} . \end{aligned}$$