Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **11/01/07**

1) Data l'equazione

$$x^4 - 8x - e^x = 0 \, .$$

determinare quante sono le soluzioni reali indicandone i relativi intervalli di separazione.
Studiare la convergenza del metodo iterativo

$$x_{i+1} = \frac{1}{8}\left(x_i^4 - e^{x_i}\right) \ , \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

Approssimare la soluzione più piccola con massimo errore assoluto $E \leq 10^{-2}$.

2) Tre ragazzi sono seduti attorno ad un tavolo a giocare nel seguente modo. Uno di essi lancia 3 volte una moneta equilibrata e vince il gioco se ottiene 3 Teste (T), mantiene il gioco se ottiene 2T ed 1 Croce (C), passa la mano al giocatore alla sua destra se ottiene 1T e 2C o al giocatore alla sua sinistra se ottiene 3C. Il gioco ha termine nel momento in cui si hanno 3T.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.
b) Classificare gli stati della catena di Markov.
c) Determinare la distribuzione limite.
d) Calcolare le probabilità di assorbimento.
e) Calcolare i tempi medi di assorbimento.

3) Due variabili discrete X, Y, hanno la densità congiunta riportata nella seguente tabella:

		Y			
		0	1	2	4
X	-1	1/24	2/24	1/24	3/24
	0	4/24	1/24	1/24	2/24
	1	2/24	1/24	5/24	1/24

a) Calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.
b) Calcolare $E[X]$, $E[Y]$ e $E[XY]$.
c) Le variabili X e Y sono indipendenti?
d) Calcolare $Var(X)$, $Var(Y)$ e $Cov(X, Y)$.

SOLUZIONE

1) Effettuando una separazione grafica si evidenzia che l'equaazione data ha 3 soluzioni reali appartenenti ai seguenti intervalli di separazione:

$$\alpha_1 \in]-0.5, 0[= I_1 \,, \quad \alpha_2 \in]2, 2.5[= I_2 \,, \quad \alpha_3 \in]8, 9[= I_3 \,.$$

Il metodo proposto ha funzione di iterazione $\phi(x) = \frac{1}{8}(x^4 - e^x)$ la cui derivata prima risulta $\phi'(x) = \frac{1}{8}(4x^3 - e^x)$. La condizione fondamentale del teorema di convergenza locale $|\phi'(x)| \le k < 1$ risulta verificata solo sull'intervallo I_1 e non su I_2 e I_3.
In alternativa, ponendo $f(x) = x^4 - 8x - e^x$ si ha $f'(x) = 4x^3 - 8 - e^x$ e $f''(x) = 12x^2 - e^x$. Le due derivate sono di segno costante sugli intervalli di separazione per cui il metodo di Newton è sicuramente convergente scegliendo l'estremo che verifica la condizione $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Più precisamente risulta

$$\begin{array}{lllll} x \in I_1 & \Longrightarrow & f' < 0 & f'' > 0 & x_0 = -0.5 \,, \\ x \in I_2 & \Longrightarrow & f' > 0 & f'' > 0 & x_0 = 2.5 \,, \\ x \in I_3 & \Longrightarrow & f' < 0 & f'' < 0 & x_0 = 9 \,. \end{array}$$

Utilizzando uno dei due metodi si ottiene $\alpha_1 \in [-0.12, -0.11]$ ($\alpha_1 = -0.1117625\ldots$).

2) Indichiamo gli stati della catena con $E_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4$ dove, per esempio, allo stato E_1 si abbina il primo giocatore, allo stato E_2 il secondo giocatore, allo stato E_3 il terzo giocatore ed allo stato E_4 la vittoria del giocatore che ha ottenuto 3T.
La matrice di transizione risulta

$$T = \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ 3/8 & 1/8 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si ha uno stato assorbente dato da E_4. Gli stati E_1, E_2, E_3 sono transitori.
Si ha una sola distribuzione limite data da $\pi = (0, 0, 0, 1)$.
Le probabilità di assorbimento nella classe $C = \{E_4\}$ sono, ovviamente,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \,.$$

I tempi medi di assorbimento sono dati dalla soluzione del sistema lineare

$$\begin{array}{lll} \eta_1 & = & \frac{3}{8}\eta_1 + \frac{3}{8}\eta_2 + \frac{1}{8}\eta_3 + 1 \\ \eta_1 & = & \frac{1}{8}\eta_1 + \frac{3}{8}\eta_2 + \frac{3}{8}\eta_3 + 1 \\ \eta_1 & = & \frac{3}{8}\eta_1 + \frac{1}{8}\eta_2 + \frac{3}{8}\eta_3 + 1 \end{array}$$

che è

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 8 \,.$$

3) Le densità marginali sono

$$f_X(x) = \begin{cases} 7/24 & x=-1 \\ 8/24 & x=0 \\ 9/24 & x=1 \end{cases} \quad , \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 7/24 & y=0 \\ 4/24 & y=1 \\ 7/24 & y=2 \\ 6/24 & y=4 \end{cases} \quad .$$

Considerando la variabile $U = XY$, questa ha la seguente densità di probabilità

$$f_U(u) = \begin{cases} 3/24 & u=-4 \\ 1/24 & u=-2 \\ 2/24 & u=-1 \\ 11/24 & u=0 \\ 1/24 & u=1 \\ 5/24 & u=2 \\ 1/24 & u=4 \end{cases} \quad .$$

Con semplici calcoli abbiamo

$$E[X] = \frac{1}{12}\,, \quad E[Y] = \frac{7}{4}\,, \quad E[XY] = E[U] = -\frac{1}{24}\,.$$

per cui, risultando $E[XY] \neq E[X]E[Y]$, le due variabili non sono indipendenti.
Infine, da $E[X^2] = 2/3$ e $E[Y^2] = 16/3$ si ottiene

$$Var(X) = \frac{95}{144}\,, \quad Var(Y) = \frac{109}{48}\,, \quad Cov(X,Y) = -\frac{3}{16}\,.$$