**Dipartimento di Matematica Applicata**

**"Ulisse Dini"**

# Metodi Matematici per l'Ingegneria

**Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica** **12/01/06**

**1)** Data l'equazione

$$\log(x) - x^2 + 3x = 0\,,$$

determinare quante sono le soluzioni reali indicandone i relativi intervalli di separazione.
Studiare la convergenza dei metodi iterativi

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \exp(x_i^2 - 3x_i)\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots\,, \\ x_{i+1} &= \frac{x_i^2 - \log(x_i)}{3}\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots\,. \end{aligned}$$

Approssimare la soluzione più piccola con massimo errore assoluto $E \leq 10^{-2}$.

**2)** Una catena di Markov ha matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

a) La catena di Markov risulta riducibile?

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare le probabilità di assorbimento.

d) Determinare i tempi medi di assorbimento.

**3)** Una urna contiene 50 palline bianche e 50 palline nere perfettamente uguali (escluso il colore).
Si estraggono a caso e senza rimpiazzo due palline senza guardarne il colore.
Si estrae una terza pallina e si nota che è di colore bianco.
Quale è la probabilità che anche le prime due palline siano di colore bianco?

## Soluzione

1) L'equazione ha due soluzioni reali $\alpha_1 \in ]0.35, 0.40[$, $\alpha_2 \in ]3.3, 3.4[$.
Relativamente alla radice $\alpha_1$, il primo metodo assicura la convergenza poiché, posto $\phi_1(x) = \exp(x^2 - 3x)$, risulta $| \phi_1'(x) | \leq | \exp((0.35)^2 - 1.05) = 0.90\ldots < 1$ per ogni $x \in ]0.35, 0.4[$.
Il secondo metodo assicura la convergenza poiché, posto $\phi_2(x) = \frac{1}{3}(x^2 - \log(x))$, risulta $| \phi_2'(x) | \leq | \frac{1}{3}((0.35)^2 - \log(0.35)) | = 0.7\ldots < 1$ per ogni $x \in ]0.35, 0.4[$.
Utilizzando uno dei due metodi con valore iniziale $x_0 = 0.375$, si ottiene $\alpha_1 \in ]0.37, 0.38[$.
Nessuno dei due metodi è idoneo ad approssimare la radice $\alpha_2$.

2) Indicando con $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ gli stati della catena, dalla riducibilità della matrice $T$ si deduce che si hanno due classi chiuse $C^{(1)} = \{E_1, E_4\}$, $C^{(2)} = \{E_3, E_5\}$ e due stati transitori $\tau = \{E_2, E_6\}$.
Le probabilità di assorbimento relative ai due stati transitori risultano

$$\lambda_2^{(1)} = \lambda_6^{(1)} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2^{(2)} = \lambda_6^{(2)} = \frac{1}{2}\,.$$

I tempi medi di assorbimento sono

$$\eta_2 = \eta_6 = \frac{3}{2}\,.$$

3) La probabilità cercata è una probabilità condizionale. Si devono determinare le probabilità di avere estratto in sequenza tre palline bianche (BBB) e di avere estratto tre palline con la terza certamente bianca (??B). Le possibili sequenze sono

$$NNB \qquad NBB \qquad BNB \qquad BBB\,.$$

Si ottiene

$$P(NNB) = P(BNB) = P(NBB) = \frac{2450}{19404}\,, \quad P(BBB) = \frac{2352}{19404}\,.$$

La probabilità cercata è

$$\frac{P(BBB)}{P(NNB) + P(BNB) + P(NBB) + P(BBB)} = \frac{8}{33}\,.$$