Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 13/02/08

1) È data l'equazione

$$e^{-x} - \alpha|x| = 0\,, \quad \alpha \in R\,.$$

a) Studiare l'equazione al variare del parametro reale α.

b) Posto $\alpha = 2$, determinare intervalli di separazione delle soluzioni reali.

c) Per approssimare le soluzioni del punto b) studiare la convergenza dei processi iterativi

$$x_{i+1} = \frac{e^{-x_i}}{2}\,, \qquad x_{i+1} = -\log(2x_i)\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

2) Si hanno 6 postazioni numerate da 1 a 6. Se ci si trova in 6 si rimane fermi. Se ci si trova in una qualunque altra postazione si tira un dado a 6 facce (non truccato) e, se è possibile, si torna indietro di tanti posti quanto è il valore ottenuto altrimenti si rimane fermi.

a) Costruire la matrice di transizione.

b) Classificare gli stati della catena.

c) Determinare le distribuzioni limite.

d) Calcolare i tempi medi di assorbimento.

3) Una variabile X ha densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}Kx^2 & -1 \le x \le 0 \\ \frac{3}{2}K^2 x & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

a) Calcolare la costante K.

b) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.

c) Determinare la funzione di ripartizione.

Soluzione

1) Da una semplice separazione grafica si deduce la seguente tabella

$$\begin{array}{ll} \alpha > e & \text{3 soluzioni (1 positiva, 2 negative)} \\ \alpha = e & \text{2 soluzioni } (x = -1 \text{ doppia, l'altra positiva}) \\ 0 < \alpha < e & \text{1 soluzione positiva} \\ \alpha \leq 0 & \text{nessuna soluzione} \end{array} .$$

Per $\alpha = 2$ si ha una unica soluzione separata dall'intervallo $[0, 1]$.
Le funzioni di iterazione dei due processi iterativi sono, rispettivamente, $\phi_1(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ e $\phi_2(x) = -\log(2x)$. Le derivate prime sono $\phi_1'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$ e $\phi_2'(x) = -\frac{1}{x}$.
Per $x \in [0, 1]$ risulta $|\phi_1'(x)| < 0.5$ e $|\phi_2'(x)| \geq 1$ per cui il primo metodo (scegliendo opportunamente il punto iniziale) è convergente mentre il secondo processo non converge.
Con $x_0 = 0$, il primo metodo converge al valore $x = 0.351733.....$

2) La matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La catena risulta riducibile e presenta due classi chiuse date dagli stati assorbenti $C^{(1)} = \{E_1\}$ e $C^{(2)} = \{E_6\}$ mentre gli stati E_2, E_3, E_4, E_5 sono transitori.
Si hanno due distribuzioni limite

$$\pi^{(1)} = (1, 0, 0, 0, 0, 0) , \qquad \pi^{(2)} = (0, 0, 0, 0, 0, 1) .$$

Per calcolare i tempi medi di assorbimento si risolve il sistema lineare

$$\begin{aligned} \eta_2 &= 1 + \tfrac{5}{6}\eta_2 \\ \eta_3 &= 1 + \tfrac{1}{6}\eta_2 + \tfrac{4}{6}\eta_3 \\ \eta_4 &= 1 + \tfrac{1}{6}\eta_2 + \tfrac{1}{6}\eta_3 + \tfrac{3}{6}\eta_4 \\ \eta_5 &= 1 + \tfrac{1}{6}\eta_2 + \tfrac{1}{6}\eta_3 + \tfrac{1}{6}\eta_4 + \tfrac{2}{6}\eta_5 \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = \eta_5 = 6 .$$

3) Imponendo $\int_R f(x)\,dx = 1$ si ha l'equazione $3K^2 + K - 4 = 0$ da cui si ricava $K = 1$.
Con semplici calcoli si ha

$$E[X] = \frac{5}{16}\,, \quad E[X^2] = \frac{21}{40}\,, \quad Var(X) = \frac{21}{40} - \frac{25}{256} = \frac{547}{1280}\,.$$

La funzione di ripartizione è

$$F(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4} & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4} & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}\,.$$