Applicazioni lineari

Def. Siano V_1, V_2 spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Un'applicazione lineare (o mappa lineare) è una mappa $\varphi : V_1 \to V_2$ soddisfando

a) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V_1$

b) $\lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall v \in V_1$.

Esempi

1) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ fisso.

Infatti, a) $\lambda_1(a_1 + b_1) + \dots + \lambda_n(a_n + b_n) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_n b_1 + \dots + \lambda_n b_n$

b) $\lambda(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_1(\lambda a_1) + \dots + \lambda_n(\lambda a_n)$.

Però non sono lineari:

i) $\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + c$ se $c \neq 0$,

ii) $\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \lambda_1 a_1^2 + \dots + \lambda_n a_n^2$

2) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}^2$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \\ \mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\mu_1, \dots, \mu_n$ fissi.

Questo esempio si generalizza da 2 a m: mappe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

3) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}^{n-1}$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Esempi simili $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-2}$, $\mathbb{R}^{n-3}$ ecc.

4) $V_1 = \mathbb{R}[x]_{\leq d}$ $\quad V_2 = \mathbb{R}[x]_{\leq d-1}$ $\quad \varphi(f) := f'$.

Infatti, $(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$

Ma si vede anche su $(a_d x^d + \dots + a_0)' = d a_d x^{d-1} + (d-1) a_{d-1} x^{d-2} + \dots + a_1$.

5) $V_1 = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}, \int_0^1 f < \infty \}$

$V_2 = \mathbb{R}$ $\quad \varphi(f) := \int_0^1 f.$

Infatti, $\int_0^1 (f_1 + f_2) = \int_0^1 f_1 + \int_0^1 f_2$, $\int_0^1 (\lambda f) = \lambda \int_0^1 f$.

Due sotto-spazi importanti: se $\varphi : V_1 \to V_2$ mappa lineare

$\mathrm{Ker}(\varphi) := \{ v \in V_1 : \varphi(v) = 0 \}$ <u>nucleo</u> di φ

$\mathrm{Im}(\varphi) := \{ w \in V_2 : \exists\, v \in V_1 \text{ tale che } w = \varphi(v) \}$ <u>immagine</u> di φ

<u>Prop.</u> $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset V_1$, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset V_2$ sono dei sottospazi.

<u>Dim.</u> <u>Ker</u>: $*$ se $\varphi(v_1) = 0, \varphi(v_2) = 0 \Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0$

$**$ se $\varphi(v) = 0$, $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = 0$.

<u>Im</u>: $*$ se $w_1 = \varphi(v_1)$, $w_2 = \varphi(v_2)$,

$w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

$**$ se $w = \varphi(v)$, $\lambda w = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

<u>Teorema</u>. Se $\dim V_1 < \infty$, $\varphi : V_1 \to V_2$ lin. $\boxed{\dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \dim \mathrm{Im}(\varphi) = \dim V_1.}$

<u>Dim.</u> Sia $v_1, \dots, v_r$ una base di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ [quindi $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = r$]

$w_1, \dots, w_s$ una base di $\mathrm{Im}(\varphi)$. [quindi $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = s$]

Siano $\underbrace{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s}_{\in V_1}$ tali che $\varphi(\bar{v}_1) = w_1, \dots, \varphi(\bar{v}_s) = w_s$.

Dimostriamo che $v_1, \dots, v_r, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s$ è una base di V_1.

[$\Rightarrow \dim V_1 = r + s$, ed il teorema è vero.]

<u>Indipendenza</u>: Supponiamo

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} \bar{v}_1 + \dots + \lambda_{r+s} \bar{v}_s = 0$. Applichiamo φ:

$0 + \varphi(\lambda_{r+1} \bar{v}_1 + \dots + \lambda_{r+s} \bar{v}_s) = 0$ $\quad [\varphi(v_i) = 0 \ \forall i]$

$\lambda_{r+1} \varphi(\bar{v}_1) + \dots + \lambda_{r+s} \varphi(\bar{v}_s) = 0$

$\lambda_{r+1} w_1 + \dots + \lambda_{r+s} w_s = 0$

$\Rightarrow \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{r+s} = 0$ perché $w_1, \dots, w_s$ <u>base</u>

Quindi $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ perché $v_1, \ldots, v_r$ <u>base</u> di $Ker(\varphi)$.

In fine, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_{r+s} = 0$ ✓

$Span(v_1, \ldots, v_r, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_s) = V_1$: sia $v \in V_1$.

$\varphi(v) \in Im(\varphi) \Rightarrow \exists \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_s : \varphi(v) = \bar{\lambda}_1 w_1 + \ldots + \bar{\lambda}_s w_s$.

Ma allora $\varphi(v - \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 - \ldots - \bar{\lambda}_s \bar{v}_s) =$

$$= \varphi(v) - \bar{\lambda}_1 \underbrace{\varphi(\bar{v}_1)}_{w_1} - \ldots - \bar{\lambda}_s \underbrace{\varphi(\bar{v}_s)}_{w_s} = 0.$$

Quindi $v - \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 - \ldots - \bar{\lambda}_s \bar{v}_s \in Ker(\varphi)$.

Ma allora : $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ $v - \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 - \ldots - \bar{\lambda}_s \bar{v}_s = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$ perché $v_1, \ldots, v_r$ <u>base</u> di $Ker(\varphi)$.

In somma, $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r + \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 + \ldots + \bar{\lambda}_s \bar{v}_s$ ✓

<u>Esempi</u>

1) $V = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0 \right)$ [soluzioni dell'equazione omogenea $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$] Qui $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ <u>non</u> tutti $= 0$.

Osservazione: $V = Ker(\varphi)$, dove $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n.$$

Se $a_1, \ldots, a_n$ non tutti $= 0 \Rightarrow Im(\varphi) \neq 0 \Rightarrow Im(\varphi) = \mathbb{R}$.

[perché $Im(\varphi) \subset \mathbb{R}$ è un sottospazio ed i soli sottospazi sono $0, \mathbb{R}$]

$\Rightarrow \dim Im(\varphi) = 1 \Rightarrow \dim Ker(\varphi) = \dim V = \boxed{n-1}$

2) $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq d} \to \mathbb{R}[x]_{\leq d-1} : f \mapsto f'$.

$\dim \mathbb{R}[x]_{\leq d} = d+1$ $[1, x, \ldots, x^d$ base$]$

$Ker(\varphi) = \{ f \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} : f' = 0 \} = \{ f = \text{costante} \}$

$\Rightarrow \dim Ker(\varphi) = 1$.

Allora $\dim Im(\varphi) = d+1-1 = d \Rightarrow Im(\varphi) = \mathbb{R}[x]_{\leq d-1}$.

Infatti, $\left(\frac{a_{d-1}}{d} x^d + \frac{a_{d-2}}{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_0 x \right)' = a_{d-1} x^{d-1} + a_{d-2} x^{d-2} + \ldots + a_0$.

3) Se $\varphi: V_1 \to V_2$, $e_1, \dots, e_n$ base di V_1, φ è completamente determinata da $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$.
Infatti, se $v \in V_1$ generale, $\exists!\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$:
$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \Rightarrow \varphi(v) = a_1 \varphi(e_1) + \dots + a_n \varphi(e_n)$.
Viceversa, se $w_1, \dots, w_n \in V_2$ qualsiasi, $\varphi(e_1) := w_1, \dots$
$\dots, \varphi(e_n) = w_n$ definisce un'unica appl. lineare.
Esempio concreto: $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2$, $e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ base standard. Allora $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) := 0$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
invia $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ generale su $\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Quindi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Span}(e_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \end{bmatrix} : a_2 \in \mathbb{R} \right\}$
$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Span}(e_2) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix} : a_1 \in \mathbb{R} \right\}$

In questo caso $\underline{\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = 0}$, $\mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$.
Ma se $\psi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) := 0$, $\psi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, allora
$\psi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \end{bmatrix} : a_1 \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \underline{\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\psi)} = \mathrm{Span}(e_1)$!
In entrambi i casi $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \dim \mathrm{Im}(\varphi) = 1 + 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

4) Nuova soluzione di un'esercizio precedente.

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 0 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 0 \end{array} \right\}$$

$\dim V = ?$

Sia $\varphi: M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & & a_{33} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{bmatrix}$

φ è lineare con $\mathrm{Ker}(\varphi) = V$, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \dim V = \dim M_{3\times 3}(\mathbb{R}) - \dim \mathbb{R}^3 = 9 - 3 = 6.$

[Infatti, $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\right)$.]

<u>Problema</u>: Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un' appl. lineare. Conoscendo i valori di φ sulla base standard, come calcolare $\varphi(v)$ per $v \in \mathbb{R}^n$ generale?

<u>Caso $n = m = 2$</u> Siano $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ la <u>base standard</u>

Se $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare, $\exists\, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ generale, allora come φ è lineare,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = b_1 \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + b_2 \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 \end{bmatrix}$$

<u>Def.</u> Se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n$, loro <u>prodotto</u> è il vettore in $\mathbb{R}^m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{v} := \begin{bmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + \dots + a_{1n} b_n \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \dots + a_{2n} b_n \\ \vdots \\ a_{m1} b_1 + a_{m2} b_2 + \dots + a_{mn} b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

<u>Oss.</u> Nel caso precedente $\varphi(v) = Av$, dove $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

In generale, sia $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\dots$, $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ la base standard

Notiamo per $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} \cancel{a_{1n}}\ 0 \\ \cancel{a_{2n}}\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

e sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Prop. Se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ è un vettore generale,

allora $\varphi(v) = A \cdot v$.

Dim. Stesso argomento: scrivere $v = b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n$

$\Rightarrow \varphi(v) = b_1 \varphi(e_1) + \ldots + b_n \varphi(e_n)$

Ma $\varphi(e_i)$ = colonna N° i di A !!

Esempio. 1) Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = x + 2y + 3z$.

Trovare $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Naturalmente è $1 \cdot 1 + 2(-1) + 3 \cdot 1 = 2$

Ma anche:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3.$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2.$$

2) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

E infatti, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix}$.

Conclusione: Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare,

$e_1, \ldots, e_n$ la base standard

* $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ determina φ di maniera unica

* $\forall v$ possiamo calcolare

$\varphi(v) = A \cdot v$,

dove $A \in M_{\cancel{n \times n}\; m \times n}(\mathbb{R})$ è la matrice definita sopra.

Generalizzazione. Sia $\varphi: V \to W$ lineare.

Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V $[\dim V = n]$

$\mathcal{B}' = \{e_1', \dots, e_m'\}$ —"— W $[\dim W = m]$

Scriviamo
$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= a_{11} e_1' + a_{21} e_2' + \dots + a_{m1} e_m' \\ \varphi(e_2) &= a_{12} e_1' + a_{22} e_2' + \dots + a_{m2} e_m' \\ &\vdots \\ \varphi(e_n) &= a_{1n} e_1' + a_{2n} e_2' + \dots + a_{mn} e_m'\end{aligned}$$

Def. La matrice di φ rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ è:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Quindi $A = \left[\varphi(e_1) \middle| \varphi(e_2) \middle| \dots \middle| \varphi(e_n) \right]$ colonne: coordinate di $\varphi(e_i)$ rispetto a $e_1', \dots, e_m'$.

Teorema. Se $v = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$ è un vettore di V consideriamo il vettore colonna in $\mathbb{R}^n$: $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$
Allora le coordinate di $\varphi(v)$ rispetto a $\mathcal{B}' = \{e_1', \dots, e_m'\}$ sono date dal vettore colonna
$$A \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Dim. Come sopra per $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$!

Importante: la matrice A è sempre definita con due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$!
Però nel caso $V = W$, possiamo scegliere $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. In questo caso si parla della matrice di $\varphi: V \to V$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Esempi:

1) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x + 2y.$

Matrice di φ rispetto alle base standard:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \implies A = [1 \ 2] \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$$

Adesso consideriamo la base $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ (e 1 di $\mathbb{R}$)

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3 \implies A = [1 \ 3] \text{ in queste basi.}$$

2) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ x+2y \end{pmatrix}$

Matrice rispetto alla base standard:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \implies A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice rispetto alla base $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \implies A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrice rispetto alla base $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \varphi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \implies A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se scriviamo le coordinate non rispetto alla base standard, ma rispetto a questa base, φ diventa molto semplice: $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x \\ 0 \end{bmatrix}$

Torneremo a questa situazione quando studiamo gli autovettori.

3) $\varphi: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \qquad \varphi(f) = f'$.

Base standard: $1, x, x^2$. Matrice di φ rispetto alla base standard:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ \varphi(x) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ \varphi(x^2) = 2x = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In realtà, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$. In $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ prendiamo come base $1, x, x^2$, ma in $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ $\;2, x+1$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(1) = 0 = 0\cdot 2 + 0\cdot(x+1) \\ \varphi(x) = 1 = \frac{1}{2}\cdot 2 + 0\,(x+1) \\ \varphi(x^2) = 2x = (-1)2 + 2\,(x+1) \end{array}\right\} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4) $\dim V = n$, $\varphi: V \to V \qquad \varphi(v) = v \quad \forall v$.

Matrice di φ rispetto ad ogni base $v_1, \dots, v_n$:

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$ matrice identità. [Perché $\varphi(v_i) = v_i \;\forall i$].

Fissiamo $\lambda \in \mathbb{R}$, e sia $\varphi_\lambda: V \to V \quad \varphi_\lambda(v) := \lambda v$.

Matrice di φ_λ rispetto ad ogni base:

$$\begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

Ancora più generalmente, se $\exists$ base $e_1, \dots, e_n$ tale che $\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, \dots, \varphi(e_n) = \lambda_n e_n$ per $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, allora la matrice rispetto a questa base è

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ matrice diagonale.

Vedremo: tale base non esiste sempre, ma in buoni casi sì.

Problema: Sia $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare, di matrice A [rispetto alle base standard]. Come trovare $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$ utilizzando A?

Ker(φ): Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $\quad v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

$v \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff Av = 0 \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ soluzione di $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

Quindi: per trovare $\mathrm{Ker}(\varphi)$, bisogna risolvere il sistema omogeneo [per esempio con Gauss].

Im(φ): Sappiamo che se $e_1, \dots, e_n$ è la base standard,

$\varphi(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \varphi(e_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$

Ma $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Span}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$

[Infatti, se $w \in \mathrm{Im}(\varphi) \overset{def}{\Rightarrow} \exists\, v \in \mathbb{R}^n : w = \varphi(v)$

Ma $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \Rightarrow w = \varphi(v) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n)$]

Quindi $\mathrm{Im}(\varphi)$ è lo span delle colonne di A in $\mathbb{R}^m$.

Per trovare $\dim \mathrm{Im}(\varphi)$, bisogna determinare la dimensione di questo span.

Def. Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, il rango di A e'

$$rg(A) := \dim \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right)$$

Conclusione: Se φ ha matrice A, $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = rg(A)$.

Metodo per calcolare $rg(A)$: bisogna estrarre una base di Span (colonne).

Facciamo l'algoritmo di Gauss per A.

Abbiamo visto: numero delle colonne lin. indipendenti = numero dei pivot della forma a scalini. Quindi:

Prop. $rg(A)$ = numero dei pivot della forma a scalini.

[Ricordiamo l'argomento: nella forma a scalini le colonne che contengono un pivot sono lin. indipendenti. Aggiungendo una colonna senza pivot abbiamo colonne dipendenti perchè il sistema lin. associato ha una soluzione non banale.]

Esempio: Sia $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ di matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Troviamo basi di $Ker(\varphi)$, $Im(\varphi)$.

Gauss: La forma ~~ridotta~~ è a scalini $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pivots nelle prime due colonne $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ base di $Im(\varphi)$ [rango = 2]

$Ker\,\varphi \Leftrightarrow$ soluzioni di
$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$$
$$-x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_1 = -3x_3 - 4x_4 \end{array} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} x_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} x_4$$ sol. generale del sistema

$\Rightarrow$ v_1, v_2 base di $Ker(\varphi)$.

Da notare: $Ker(\varphi) \subset \mathbb{R}^4$, $Im(\varphi) \subset \mathbb{R}^3$!

$\dim Ker(\varphi) + \dim Im(\varphi) = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$

come il teorema lo dice.

Def. Un'applicazione lineare $\varphi: V_1 \to V_2$ è un <u>isomorfismo</u> se $\mathrm{Im}(\varphi) = V_2$ e per $v_1, v_1' \in V_1$ $\varphi(v_1) = \varphi(v_1') \iff v_1 = v_1'$. Notazione: $\varphi: V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$.

Dunque: φ è un isomorfismo $\iff \forall v_2 \in V_2 \ \exists! \ v_1 \in V_1 : \varphi(v_1) = v_2$.

Osservazione: φ è un isomorfismo $\iff \mathrm{Im}(\varphi) = V_2$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$.

[perché $\varphi(v_1) = \varphi(v_1') \iff v_1 - v_1' \in \mathrm{Ker}(\varphi)$]

Esempio. $V_1 = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $V_2 = \mathbb{R}^4$ $\varphi: M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$ è un isomorfismo.

Ma anche $$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ definisce un isomorfismo $\psi: \mathbb{R}^4 \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Qui $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$ sono l'identità.

In generale: Se $\varphi: V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ è un'isomorfismo,

Si può definire un'isomorfismo $\varphi^{-1}: V_2 \xrightarrow{\sim} V_1$

via $\varphi^{-1}(v_2) :=$ l'unico $v_1 \in V_1$ tale che $\varphi(v_1) = v_2$.

[Nell'esempio precedente $\psi = \varphi^{-1}$.]

Infatti, φ^{-1} è lineare perché se $v_2, v_2' \in V_2$, $v_1 := \varphi^{-1}(v_2)$, $v_1' := \varphi^{-1}(v_2')$

$\Rightarrow \varphi(v_1 + v_1') = \varphi(v_1) + \varphi(v_1') = v_2 + v_2'$

$\Rightarrow v_1 + v_1' = \varphi^{-1}(v_2 + v_2')$ e d'altra parte $v_1 + v_1' = \varphi^{-1}(v_2) + \varphi^{-1}(v_2')$.

Inoltre $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\varphi(\lambda v_1) = \lambda \varphi(v_1) = \lambda v_2 \Rightarrow \lambda v_1 = \varphi^{-1}(\lambda v_2)$, ma $\lambda v_1 = \lambda \varphi^{-1}(v_2)$.

φ^{-1} è <u>l'applicazione inversa</u> di φ.

<u>Osservazione</u>: sia V uno spazio vettoriale, $\dim V = n$ e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V.

Ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$.

Allora $v \mapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ definisce un <u>isomorfismo</u> $V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$.

[$\mathcal{B} \mapsto$ base standard di $\mathbb{R}^n$.]

Infatti, φ è lineare, $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

Da notare: φ <u>dipende</u> dalla base $\mathcal{B}$! Un'altra base definisce un altro isomorfismo.

<u>Esempi</u>. 1) Nell'esempio precedente φ è definita dalla base standard $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) La base standard $1, x, x^2, \dots, x^n$ definisce un isomorfismo $\mathbb{R}[x]_{\leq n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{n+1}$.

Adesso sia $\varphi: V_1 \to V_2$ una qualsiasi applicazione lineare, dove $\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$.

Siano $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base di V_1

$\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ base di V_2

Sia A la matrice di φ rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Si ricorda: colonna N° j di A = coordinate di $\varphi(e_j)$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

D'altra parte, $\mathcal{B}$ definisce $\psi: V_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}'$ definisce $\psi': V_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$

Allora $\psi' \circ \varphi \circ \psi^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare tale che la matrice rispetto alle basi standard è A! [perché $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \leftrightarrow$ basi standard]

$$\begin{array}{ccccccc} e_1,\dots,e_n & & V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 & & e'_1,\dots,e'_m \\ \updownarrow & & \varphi^{-1}\uparrow & & \downarrow \varphi' & & \updownarrow \\ \text{base standard} & & \mathbb{R}^n & \xrightarrow[v \mapsto Av]{} & \mathbb{R}^m & & \text{base standard} \end{array}$$

__Lemma.__ 1) φ^{-1} induce un isomorfismo $\mathrm{Ker}(v \mapsto Av) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\varphi)$

2) φ' —"— ~~Ker~~ $\mathrm{Im}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(v \mapsto Av)$

__Dim.__ 1) Se $v \in \mathbb{R}^n$, $Av = 0 \iff \varphi' \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(v) = 0 \iff$
$\varphi \circ \varphi^{-1}(v) = 0$ [perché φ' isom.]

2) Simile.

__Cor.__ 1) $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$ è la dimensione dello sottospazio delle soluzioni di $A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$ in $\mathbb{R}^n$.

2) $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = $ rango di A.

[Finora l'abbiamo visto solo per $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}^m$!!]

__Esercizio.__ Sia $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$,

$$\varphi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_3 + a_2 + a_1)x^3 + a_0x^2 + 2a_1$$

Trovare basi di $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Matrice rispetto alla base standard $1, x, x^2, x^3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(\varphi)) = $ rango (matrice) $= 3$ e $\{\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)\} = \{x^2, 2 + x^3, x^3\}$ base di $\mathrm{Im}(\varphi)$ [Base più semplice: $1, x^2, x^3$]

$\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 3} - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 4 - 3 = 1.$

Ogni vettore $\neq 0$ in $\mathrm{Ker}(\varphi)$ una base, ad esempio

$$x^3 - x^2.$$

Problema: Siano $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\psi} V_3$ applicazioni lineari.
Allora $\psi \circ \varphi : V_1 \to V_3$ è lineare.
Siano $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ base di V_1
$\mathcal{B}_2 = \{f_1, \dots, f_m\}$ base di V_2
$\mathcal{B}_3 = \{g_1, \dots, g_r\}$ base di V_3.
Siano B = matrice di φ rispetto a $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$
A = matrice di ψ rispetto a $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$.
Qual è la matrice di $\psi \circ \varphi$ rispetto a $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3$?

Caso $\boxed{n = m = r = 2}$: allora A, B e la matrice di $\psi \circ \varphi$ sono in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Dobbiamo trovare le coordinate di $(\psi\circ\varphi)(e_1), (\psi\circ\varphi)(e_2)$ rispetto a $\mathcal{B}_3 = \{g_1, g_2\}$. Siano

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$ Allora

$$\varphi(e_1) = b_{11} f_1 + b_{21} f_2, \quad \varphi(e_2) = b_{12} f_1 + b_{22} f_2.$$

$$\psi(\varphi(e_1)) = b_{11}\psi(f_1) + b_{21}\psi(f_2), \quad \psi(\varphi(e_2)) = b_{12}\psi(f_1) + b_{22}\psi(f_2).$$

Ma $\psi(f_1) = a_{11} g_1 + a_{21} g_2, \quad \psi(f_2) = a_{12} g_1 + a_{22} g_2.$

$$(\psi\circ\varphi)(e_1) = (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}) g_1 + (a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}) g_2$$
$$(\psi\circ\varphi)(e_2) = (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}) g_1 + (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}) g_2.$$

Quindi la matrice è
$$\begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{bmatrix}.$$

La situazione generale è simile:

Def. Siano $A \in M_{r \times m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Loro prodotto $(A \cdot B) \in M_{r \times m}(\mathbb{R})$ è definito da:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rm} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$A \cdot B = [c_{ij}]_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le m}}$ $\qquad c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{im} b_{mj}$

[" riga N° i x colonna N° j "]

Casi particolari: 1) $n = 1$ $\quad B =$ vettore colonna v

$A \cdot B = A \cdot v$ definito prima

2) $n = m = r = 2$ definito sopra.

Teorema. Siano $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\psi} V_3$ come sopra

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ basi di V_1, V_2, V_3

$B =$ matrice di φ [in $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$], $A =$ matrice di ψ [$\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$]

Allora la matrice di $\psi \circ \varphi$ rispetto a $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3$ è $A \cdot B$.

Dim. Stesso tipo di calcolo come nel caso $n = m = r = 2$.

Esempio. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\varphi(e_1) = e_2$

$\varphi(e_2) = e_3$

[e_1, e_2, e_3 base standard] $\quad \varphi(e_3) = 0$.

Allora per un vettore generale $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Matrice di φ rispetto a e_1, e_2, e_3:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di $\varphi \circ \varphi$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E di $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infatti, $\varphi \circ \varphi \circ \varphi = 0$!

Proprietà della moltiplicazione

1) $A(BC) = (AB)C$

Si può calcolare, ma anche: $A \leftrightarrow \psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$

$B \leftrightarrow \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$C \leftrightarrow g : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$

e $(\psi \circ \varphi) \circ g = \psi \circ (\varphi \circ g)$.

2) $AB = BA$ non è vero in generale! Esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Sia $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ la matrice identità di $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$

Allora $\forall A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \quad I \cdot A = A \cdot I = A$

Si può calcolare, ma anche $I \leftrightarrow id_{\mathbb{R}^n}$ $A \leftrightarrow \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

e $\varphi \circ id = id \circ \varphi = \varphi$.

4) Se $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ isomorfismo, abbiamo visto: $\exists\, \varphi^{-1} : V_2 \xrightarrow{\sim} V_1$ tale che $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{V_2}$, $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_{V_1}$. Se fissiamo basi $\mathcal{B}_1$ di V_1, $\mathcal{B}_2$ di V_2, φ ha matrice A

φ^{-1} — " — A^{-1}

$\Rightarrow \quad A \cdot A^{-1} = I, \quad A^{-1} A = I. \quad [I \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, dove $n = \dim V_1 = \dim V_2]$

Matrice inversa. Non esiste sempre, solo se $A \leftrightarrow \varphi$ isomorfismo.

Esempio. Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc}$

Infatti,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$$

In generale, vedremo una formula per A^{-1}.

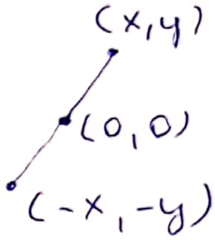
$\exists$ anche algoritmo per calcolare A^{-1}.

Esempi di geometria piana

1) Riflessione rispetto all'origine: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{R_o}{\longmapsto} \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$

Matrice rispetto ad ogni base:

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Da notare: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



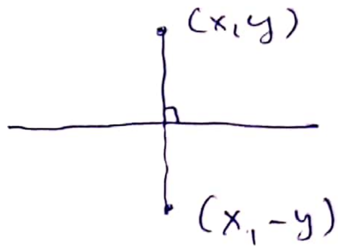
e infatti $R_o \circ R_o =$ identità.

Quindi R_o è un isomorfismo, e $R_o^{-1} = R_o$.

2) Riflessione rispetto all'asse $y = 0$: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{R_y}{\longmapsto} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

Matrice rispetto alla base standard:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ Anche $R_y \circ R_y =$ identità,



quindi R_y isomorfismo con $R_y^{-1} = R_y$.

Riflessione rispetto all'asse $x = 0$: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{R_x}{\longmapsto} \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$

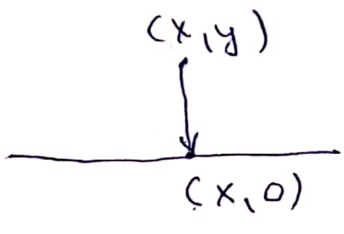
Matrice rispetto alla base standard:

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si osserva: $R_x \circ R_y = R_y \circ R_x = R_o$

Infatti, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3) Proiezione all'asse $y = 0$: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{\pi_y}{\longmapsto} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$

Matrice rispetto alla base standard:



$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si osserva:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e infatti $\pi_y \circ \pi_y = \pi_y$.

π_y <u>non</u> è un isomorfismo perché

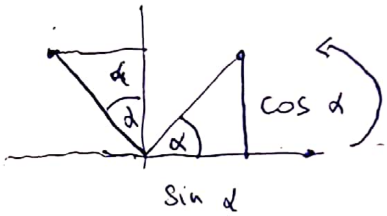
$\mathrm{Ker}(\pi_y) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} \neq 0$. Ma anche

$\mathrm{Im}(\pi_y) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \neq \mathbb{R}^2$. Infatti, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha rango 1!

4) <u>Rotazione</u> di angolo α intorno a $(0,0)$ [direzione $\circlearrowleft$]

$$\rho_\alpha\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\rho_\alpha\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$$



$\Rightarrow$ la matrice è $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ rispetto alla base standard.

Si osserva: ρ_α è un isomorfismo, con inversa $\rho_{-\alpha}$.
La matrice di $\rho_{-\alpha}$ è $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ nella base standard.

Infatti, $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ perché $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Se β è un altro angolo, $\rho_\alpha \circ \rho_\beta = \rho_{\alpha+\beta}$. Infatti,

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Nuova dimostrazione delle formule trigonometriche!

Problema: Sia V uno spazio di dim. n, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di V. Sia $\varphi: V \to V$ un'applicazione lineare.
Notazione: $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} :=$ matrice di φ rispetto a $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{B}'$ in arrivo. Se $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, si nota $[\varphi]_{\mathcal{B}} := [\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. La questione è: qual è la relazione tra le matrici $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ e $[\varphi]_{\mathcal{B}'}$?

Esempio: Siano $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\varphi: v \mapsto A \cdot v$, dove $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Allora

$[\varphi]_{\mathcal{B}} = A$, calcoliamo $[\varphi]_{\mathcal{B}'}$:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi $[\varphi]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Qual è la relazione con A?

In generale, poniamo:

Def. Sia V uno spazio vettoriale di dim. n, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi. La matrice di cambiamento di base (rispetto a $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$) è definita da $P := [id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Esempio. Calcoliamo P nella situazione dell'esempio precedente. $\varphi =$ identità, quindi

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è più semplice: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Si nota: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

In generale: $[id_V]^{B}_{B'} \cdot [id_V]^{B'}_{B} = [id_V \circ id_V]_B = [id_V]_B$

è la matrice identità. Quindi P è invertibile e

$P^{-1} = [id_V]^{B}_{B'}$.

Teorema: Se B, B' sono due basi di V, P = matrice di cambiamento

$\varphi: V \to V$ applicazione lineare con $A = [\varphi]_B$

allora $[\varphi]_{B'} = PAP^{-1}$.

Dim. $[\varphi]_{B'} = [id_V \circ \varphi \circ id_V]_{B'} = [id_V]^{B'}_{B} [\varphi]^{B}_{B} [id_V]^{B}_{B'} =$

$= PAP^{-1}$!

Esempio. Nell'esempio precedente

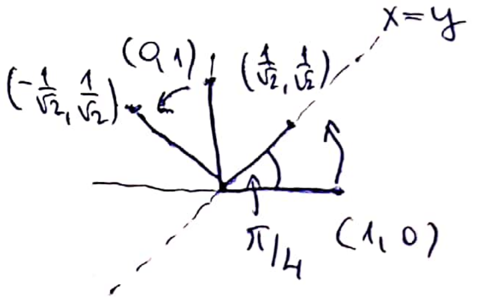
$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

Esempio geometrico.

Sia $\pi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la proiezione alla retta $\{x=y\}$.

Qual è la sua matrice rispetto alla base standard?

Sia B^* la base $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$



$\pi\left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\pi\left(\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow [\pi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =: A$. Se B' è la base standard, $P = [id]^{B'}_{B}$ = matrice della rotazione di angolo $\frac{\pi}{4}$!

$$= \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$