Il determinante

Il determinante sarà una funzione $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ con la proprietà fondamentale:

$$\det(A) = 0 \overset{(*)}{\iff} \text{le righe di } A \text{ sono lin. dipendenti}$$
$$\iff \text{le colonne} \quad -\text{''}- \quad -\text{''}-$$

Esempi. 1) $n = 1$ $\quad A = [a] \quad \det(A) := a.$

2) $n = 2$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det(A) := ad - bc$

Verifichiamo la proprietà fondamentale $(*)$ per $n = 2$.

$\Rightarrow$: Se $ad - bc = 0$, allora:

* Se $a = 0$, allora $b = 0$ o $c = 0$

- Se $a = b = 0$, la prima riga è 0 $\Rightarrow$ righe dipendenti
- se $a = c = 0$, ma $b \neq 0$, $[0 \ d] = \frac{d}{b}[0 \ b]$

* Se $a \neq 0$, sia $\lambda := \frac{b}{a}$

$ad = bc \Rightarrow d = \lambda c \Rightarrow [a \ b] = a[1 \ \lambda]$
$[c \ d] = c[1 \ \lambda]$ dipendenti!

[Dipendenza delle colonne simile.]

$\Leftarrow$: Se $a = c = 0$, $ad - bc = 0$.

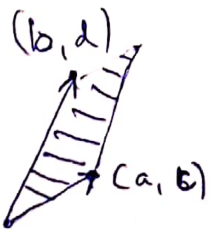
* Se $a \neq 0$ e le righe sono dipendenti,

$c = \lambda a$, $d = \lambda b$ per $\lambda = \frac{c}{a}$ $\Rightarrow ad - bc = \lambda(ab - ab) = 0.$

* Se $c \neq 0$, argomento simile, anche per le colonne.

Il determinante ha un'interpretazione geometrica:

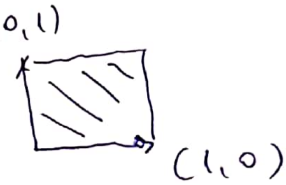
Teorema. $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$ area della parallelogramma definita da $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$



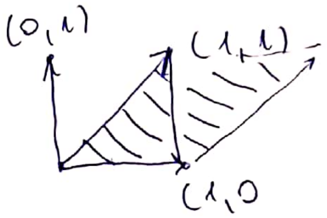
se $a, b, c, d \geq 0$ e $ad - bc \geq 0$.

Esempi

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = 1$

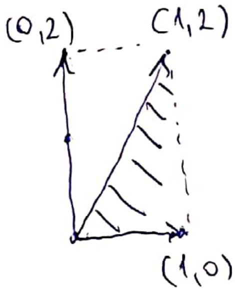


2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = 1$



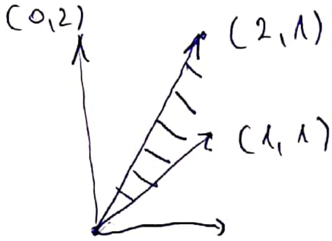
area della par. = area del quadro

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = 2$



area della par. = area del rettangolo $= 2$

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = 2-1 = 1$



Qui area della par. = area della par. di 3) —
— —"— di 2 $= 2-1 = 1$.

Oss. Lo stesso argomento che dimostra 4) dimostra il teorema per il caso dove $a = b$ (e $c < d$).

Dim. del teorema. Se $a = 0$, allora come $a, d, b, c \geq 0$ e $ad - bc \geq 0 \Rightarrow ad - bc = 0$ & $b = 0$ o $c = 0$.
Ma se $a = b = 0$ o $a = c = 0$, i vettori sono dipendenti e l'area $= 0$.
Quindi supponiamo $a \neq 0$. Se $b = a \Rightarrow$ osservazione sopra. Altrimenti,

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \cdot \frac{a}{b} \\ c & d \cdot \frac{a}{b} \end{bmatrix} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \det \begin{bmatrix} a & a \\ c & \frac{ad}{b} \end{bmatrix}$$

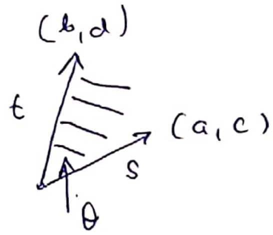
Infatti, $\frac{b}{a}\left(ad \cdot \frac{a}{b} - ac\right) = ad - bc$. [se $b \neq 0$]

D'altra parte, sappiamo dalla scuola:

Se P = parallelogramma con lati di lunghezza s, t e angolo θ, $\text{area}(P) = s \cdot t \cdot \sin(\theta)$

Quindi, se non cambio s, θ, ma cambio $t \rightsquigarrow \lambda \cdot t$ $(\lambda > 0)$

$\text{area}(P) \rightsquigarrow \lambda \cdot \text{area}(P)$. Nel nostro caso:



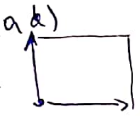
se cambio $(b, d) \rightsquigarrow (\lambda b, \lambda d)$

$t \rightsquigarrow \lambda t$

$\text{area}(P) \rightsquigarrow \lambda \cdot \text{area}(P)$.

Sopra abbiamo utilizzato $\lambda = \frac{b}{a}$, e la stessa sostituzione fa $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$! Quindi abbiamo ridotto il caso generale al caso $a = b$.

[Caso $b = 0$: * se anche $c = 0$, abbiamo $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ facile!

$\det = a \cdot d$, area() $= ad$.

* se anche $d = 0$,
allora $\det = \text{area} = 0$.

* se $c, d \neq 0$, moltiplichiamo per $\frac{d}{c} \rightsquigarrow$
si riduce al caso $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & c \end{bmatrix}$ – simile al caso sopra.]

<u>Def</u>. generale del determinante: induzione su n.

$n = 1, 2$: abbiamo visto. Se det è già definita per $n-1$:

Per $A = [a_{ij}]$ sia A_{ij} la matrice ottenuta cancellando la riga № i e la colonna № j, per i, j fisso.

<u>Fatto</u>: i numeri

* $\sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ per i <u>fisso</u>

* $\sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ per j <u>fisso</u>

Sono tutti uguali $\forall i, j$.

Def. $\det(A) :=$ uno ($\Rightarrow$ tutti) dei numeri sopra.

Se i è fisso, parliamo del sviluppo secondo la riga N° i

Se j —''— —''— —''— —''— colonna N° j.

Non verifichiamo il fatto sopra in generale.

Ma per $n=2$: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\det(A) = a \cdot d + b(-c)$ sviluppo secondo la prima riga

$= c(-b) + d \cdot a$ —''— seconda —''—

$= a \cdot d + c \cdot (-b)$ —''— prima colonna

$= b(-c) + d \cdot a$ —''— seconda colonna

Promemoria dei segni $(-1)^{i+j}$: $\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ & \vdots & & & & & \end{bmatrix}$

Notazione: $|A| := \det(A)$

Esempio $n=3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3.$$

Sviluppo secondo la seconda colonna:

$$0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 2 + 1 = 3.$$

Caso generale $n=3$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

sviluppo secondo la prima riga:

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Osserviamo: in ogni prodotto $\exists!$ elemento di ogni riga e colonna.

Questo è così per n generale, solo i segni sono da determinare.

<u>Esempio</u>: Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice <u>triangolare</u> <u>superiore</u>, i.e. $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

Allora $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dimostrazione: induzione su n. $n = 1$ ✓

Sviluppo secondo la prima colonna:

$\det(A) = a_{11} \det(A_{11})$. Ma A_{11} è triangolare di taglia $n-1$

$\Rightarrow \det(A_{11}) = a_{22} \cdots a_{nn} \Rightarrow \det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

Un risultato simile vale per le matrici triangolari inferiori.

<u>Ricordiamo</u>: L'algoritmo di Gauss, applicato a una matrice $n \times n$, produce una matrice triangolare superiore.

Qual è l'effetto delle operazioni elementari dell'algoritmo sul det?

1) <u>Cambio</u> di due righe: $\det(A) \rightsquigarrow -\det(A)$

Infatti, se si scambiano due righe <u>adiacenti</u> $i \Leftrightarrow i+1$ le sottomatrici $A_{ij} \Leftrightarrow A_{i+1,j}$ dopo lo scambio.

Ma $(-1)^{(i+1)+j} = -(-1)^{i+j} \Rightarrow$ nella formula $\sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ si cambiano tutti i segni.

Poi, scambiare le righe N° i e j $\Leftrightarrow$ cambiare righe adiacenti $(i-j) + (i-j-1) = 2(i-j) - 1$ volte.

Questo è un numero dispari!

2) Sostituzione della riga R_i con $R_i + \lambda R_j$ $(j \neq i)$: il determinante <u>non</u> <u>si</u> <u>cambia</u>.

La verifica si fa così:

I) Se A ha due righe uguali $\Rightarrow \det(A) = 0$.

[Infatti, quando si cambiano questi due righe, $\det(A) \rightsquigarrow -\det(A)$, ma non si cambia nulla.]

II) Se alla riga R_i si sostituisce $\lambda \cdot R_i$ $(\lambda \neq 0)$

$\det(A) \rightsquigarrow \lambda \cdot \det(A)$.

[Facciamo lo sviluppo rispetto alla riga R_i:

$a_{ij} \rightsquigarrow \lambda \cdot a_{ij}$ $\forall j$, ma A_{ij} non si cambia.]

III) Se in A ~~R_i~~ $R_i = \lambda \cdot R_j \to \det(A) = 0$.

[Infatti, dopo II) $\det(A) = \lambda \cdot \det(B)$ dove in B $R_i = R_j$, ma allora $\det(B) = 0$ secondo I).]

IV) Sia B la matrice ottenuta da A sostituendo la riga $R_i = [a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in}]$ con $[b_{i1}\ b_{i2} \dots b_{in}]$

Allora $\det(A) + \det(B) = \det(C)$, dove C è ottenuta da A sostituendo R_i con $[a_{i1}+b_{i1}\ a_{i2}+b_{i2} \dots a_{in}+b_{in}]$

[Fare lo sviluppo rispetto alla riga N° i]

Finalmente, sia C la matrice ottenuta da A sostituendo R_i con $R_i + \lambda R_j$. Allora dopo IV)

$\det(C) = \det(A) + \det(B)$

dove B è la matrice ottenuta con la sostituzione $R_i \rightsquigarrow \lambda R_j$.

Ma $\det(B) = 0$ secondo III).

Conclusione: se facciamo l'algoritmo di Gauss,

$\det(A) \rightsquigarrow (-1)^r \det(A)$, dove r = numero di scambi di righe

Questo si può utilizzare per calcolare $\det(A)$, riducendola in forma triangolare.

Esempio: calcoliamo il determinante di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ con questo metodo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} =: B$$

$\det(B) = 25$, ma abbiamo fatto uno scambio di righe

$\Rightarrow \det(A) = -25$.

Altro esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \cancel{\det(A) = (-1)^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1)} \cancel{= 4}. \quad \det(A) = 0.$$

Questo metodo è pratico se la matrice è grande, con molti elementi $\neq 0$. Ma quando la matrice ha molti elementi $= 0$, lo sviluppo è più pratico:

<u>Esempio</u>.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

La terza colonna ha solo un elemento $\neq 0$, con segno $+$. Quindi:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = \underline{\underline{2}}.$$

<u>Def</u>. Se $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, la sua <u>matrice trasposta</u> è $A^t := [a_{ji}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Più in dettaglio:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

<u>Osservazione</u>: $\det(A) = \det(A^t)$

perché sviluppo rispetto alla colonna i di A
= — " — — " — — " — riga i di A^t.

<u>Teorema</u>. $\det(A) = 0 \iff$ le righe di A sono dipendenti
$\iff$ le colonne — " — — " —

<u>Dim</u>. Righe di A = colonne di A^t. Come $\det(A) = \det(A^t)$
$\Rightarrow$ basta dimostrare per le ~~righe~~ colonne.

Facciamo l'algoritmo di Gauss per A: $A \sim B$
dove B è una matrice a scalini $\Rightarrow$ triangolare superiore.

* Se $\det(A) = 0$ $\Rightarrow$ la diagonale contiene un elemento $=0$ in B [$\Rightarrow \det(B) = 0$]
$\Rightarrow$ una colonna non contiene di pivot in B $\Rightarrow$ le colonne di B sono dipendenti $\Rightarrow$ anche le colonne di A.
* Se le colonne sono dipendenti $\Rightarrow$ una colonna di B non contiene di pivot $\Rightarrow$ questa colonna ha 0 nella diagonale $\rightarrow \det(B) = 0$
$\Rightarrow \det(A) = 0$.

Cor. Sia $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare data da $v \mapsto A \cdot v$.
Allora $\ker(A) \neq 0 \iff \operatorname{Im}(A) \neq \mathbb{R}^n \iff \det(A) = 0$.

Adesso generalizziamo questo cor. a $\varphi : V \to V$, $\dim V = n$.

Teorema. Se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Verifica solo per $n=2$ [caso generale difficile]:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}$$

$$(ad - bc)(a'd' - b'c') = aa'dd' + bb'cc' - a'bcd' - ab'c'd$$

$$(aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') =$$

$$= \cancel{aa'cb'} + aa'dd' + bb'cc' + \cancel{bc'dd'} - \cancel{aa'b'c} - ab'c'd$$
$$- a'bcd' + \cancel{bc'dd'}$$

Cor. Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, A^{-1} esiste $\iff \det(A) \neq 0$
e allora $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Dim. A^{-1} esiste $\iff$ $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo
$\iff \ker(A) = 0$ & $\operatorname{Im}(A) = \mathbb{R}^n \iff \det(A) \neq 0$ [Cor. precedente]
$A \cdot A^{-1} = I$ $\quad \det(I) = 1$ [matrice triangolare]
Teorema $\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$.

Prop. Sia $\varphi : V \to V$ una mappa lineare, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi di V, A la matrice di φ rispetto a $\mathcal{B}$, A' rispetto a $\mathcal{B}'$.

Allora $\det(A) = \det(A')$.

Quindi $\det(A)$ dipende solo da φ, non della base!

Dim. Sappiamo: $\exists P$ matrice invertibile: $A' = PAP^{-1}$.

Teorema $\Rightarrow \det(A') = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(A)\det(P)\det(P^{-1})$
$= \det(A)\cdot 1$.

Cor. Se $\varphi: V \to V$ è un'applicazione lineare, A la matrice di φ rispetto ad una [qualsiasi] base

$\ker(\varphi) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\varphi) \neq V \Leftrightarrow \det(A) = 0$.

Def. Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]$, la matrice aggiunta di A è $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$

dove $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ji})$

[si nota lo scambio di i e j!]

Formula di Cramer: $A\cdot\tilde{A} = \det(A)\cdot I$

dove $I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è la matrice identità.

Cor. Se $\det(A) \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\cdot\tilde{A}$.

Esempio: $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightsquigarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ se $ad - bc \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

[formula già vista]

Esempio concreto per $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -22$$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ [sviluppo rispetto alla seconda riga/colonna]

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & -11 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{22}\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & 0 & \frac{3}{11} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Dim. della formula di Cramer: calcoliamo $A \cdot \tilde{A}$.

* [prima riga di A] × [prima colonna di $\tilde{A}$]:
$(-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(A_{1n})$
$= \det(A)$ [sviluppo rispetto alla prima riga]

* di maniera simile,
[riga N° i di A] × [~~riga~~ colonna N° i di $\tilde{A}$] = $\det(A)$
[sviluppo rispetto alla ~~r~~ riga N° i di A]

* [prima riga di A] × [seconda colonna di $\tilde{A}$]:
$(-1)^{1+2} a_{11} \det(A_{21}) + (-1)^{2+2} a_{12} \det(A_{22}) + \dots + (-1)^{2+n} a_{1n} \det(A_{2n})$

Si osserva: questo è il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dove abbiamo sostituita la seconda riga di A con la prima riga. Ma allora ci sono due righe uguali $\rightarrow \det(A) = 0$.

* Di maniera simile,
[riga N° i di A] × [~~colonna~~ colonna N° $j \neq i$ di A] = 0.

Con la formula di Cramer si può dare una seconda dimostrazione del teorema "$\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ le colonne di A sono dipendenti."

$\Rightarrow$: Se $\det(A) = 0$, allora dopo Cramer $A\tilde{A} = 0$. Fissando una colonna $C_i \neq 0$ di $\tilde{A}$, la relazione $A C_i = 0$ dà una relazione lineare $\neq 0$ tra le colonne di A.

$\Leftarrow$: Se le colonne di A sono dipendenti, $\mathrm{Im}(A) \neq \mathbb{R}^n$, ma un sottospazio di dim. $< n$. Ma allora $\mathrm{Im}(A\tilde{A}) \subset \mathrm{Im}(A) \neq \mathbb{R}^n$.
Se $\det(A) \neq 0$, ~~Im~~ $A\tilde{A} = \det(A) \cdot I \Rightarrow \mathrm{Im}(A\tilde{A}) = \mathbb{R}^n$ $\lightning$

Autovalori, autovettori

Def. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\dim V < \infty$, $\varphi : V \to V$ appl. lineare. $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di φ se $\exists\, v \neq 0$ in V:

$$\varphi(v) = \lambda \cdot v.$$

In questo caso v è un autovettore associato a λ.

Oss. 1) v può essere autovettore per un solo λ. Infatti, se v è autovettore per λ_1, λ_2,

$$\lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v \implies \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{come } v \neq 0.$$

2) Fissando λ, possiamo avere molti autovettori associati allo stesso λ. Caso estremo: $\varphi = id$. In questo caso $\varphi(v) = v$ $\forall v \in V \implies \forall v \in V$ autovettore per $\lambda = 1$.
Esempio simile: $\varphi(v) = \alpha v$ $\forall v$, quindi $\varphi = \alpha \cdot id$.
Allora $\forall v \in V$ è autovettore per λ.

Prop. a) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, gli autovettori per λ insieme con 0, formano un sottospazio di V. [Notazione: V_λ, terminologia: autospazio.]

b) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = (0)$.

Dim. a) Se $v_1, v_2 \in V$ tali che $\varphi(v_1) = \lambda v_1$, $\varphi(v_2) = \lambda v_2$

$$\implies \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

$$\varphi(\alpha v_1) = \alpha\, \varphi(v_1) = \alpha \lambda v_1 = \lambda(\alpha v_1).$$

b) risulta da 1) sopra.

Perché sono interessanti?

Def. φ è diagonalizzabile se $\exists$ base di V dove la matrice di φ è diagonale.

[Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ data da $v \mapsto A \cdot v$, diciamo anche che la matrice A è diagonalizzabile]

Prop. φ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\exists$ base di V costituita di autovettori di φ.

Dim. $\Rightarrow$: Se $e_1, \dots, e_n$ è una base dove la matrice di φ è
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$
[i λ_i non necessariamente distinti!]
$\Rightarrow \varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, \dots, \varphi(e_n) = \lambda_n e_n$.

$\Leftarrow$: Viceversa, se $e_1, \dots, e_n$ è una base di V dove $\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, \dots, \varphi(e_n) = \lambda_n e_n$, la matrice è come sopra.

Non tutte le φ sono diagonalizzabili! Esempio più semplice:

Esempio. $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi : v \mapsto Av$ dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \varphi(v) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \varphi(v) = \lambda v$ vale se per $v \neq 0$
$$x_1 + x_2 = \lambda x_1$$
$$x_2 = \lambda x_2$$

Seconda eq^{ne} $\Rightarrow$ $\lambda = 1$ o $x_2 = 0$.

Se $\lambda = 1$, $x_2 = 0$ dalla prima eq^{ne} e viceversa.

Quindi $\underset{v \neq 0}{\varphi(v) = \lambda v} \Leftrightarrow \lambda = 1$ $\underline{\underline{e}}$ $x_2 = 0$

Ma allora solo i moltipli di $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono autovettori

$\Rightarrow \nexists$ base di autovettori per φ.

Come decidere se φ è diagonalizzabile? La chiave è data da:

Prop. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono autovalori <u>distinti</u> di φ
v_i autovettore associato a λ_i $i = 1, \dots, r$
$\Rightarrow v_1, \dots, v_r$ sono linearmente <u>indipendenti</u>.

Cor. 1) Ci sono un numero finito di autovalori distinti. [Perché $\dim V < \infty$]

2) φ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono gli autovalori distinti di φ, $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_r} = \dim V$.

[Infatti, sia $e_{11}, \dots, e_{1m_1}$ base di V_{λ_1}

$e_{21}, \dots, e_{2m_2}$ —"— V_{λ_2}

$\vdots$

$e_{r1}, \dots, e_{rm_r}$ —"— V_{λ_r}

Prop $\Rightarrow$ $e_{11}, \dots, e_{1m_1}, \dots, e_{r1}, \dots, e_{rm_r}$ lin. indipendenti perché se
$$\underbrace{\alpha_{11} e_{11} + \dots + \alpha_{1m_1} e_{1m_1}}_{\in V_{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{\alpha_{r1} e_{r1} + \dots + \alpha_{rm_r} e_{rm_r}}_{\in V_{\lambda_r}} = 0$$

$\Rightarrow$ $\alpha_{11} e_{11} + \dots + \alpha_{1m_1} e_{1m_1} = 0, \dots, \alpha_{r1} e_{r1} + \dots + \alpha_{rm_r} e_{rm_r} = 0$ dopo la Prop., ma allora $\forall \alpha_{ij} = 0$ perché gli e_{ij} sono elementi di basi. Finalmente, gli e_{ij} formano una base di V se il loro numero è $= \dim V$.]

3) Se $n = \dim V$ e φ ha n autovalori distinti $\Rightarrow$ φ è diagonalizzabile. [Dopo la Prop. ha n autovettori indip !]
Il reciproco è falso! Esempio: $\varphi = id$.

Insomma, metodo per decidere se φ è diagonalizzabile:

1) Trovare gli autovalori.
Se ci sono $n = \dim V$ distinti $\Rightarrow$ siamo HAPPY.
Se no,

2) Trovare gli autovettori per ogni λ_i e calcolare $\dim V_{\lambda_i}$.

Se $\sum \dim V_{\lambda_i} = \dim V$, φ è diagonalizzabile.

Se $\sum \dim V_{\lambda_i} < \dim V$, φ non è diagonalizzabile.

Nell'esempio $\varphi(v) = Av$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 1$ solo autovalore, $\dim V_1 = 1 < 2$.

Dim. della Prop. Siano $v_1, \dots, v_r$ autovettori per $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ $(\lambda_i \neq \lambda_j)$

Supponiamo $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0$. $(*)$

Dimostriamo $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ con induzione su r. $r=1$ ovvio.

Applichiamo φ a $(*)$: $\alpha_1 \varphi(v_1) + \dots + \alpha_r \varphi(v_r) = 0$.

Quindi per ipotesi $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r v_r = 0$.

Moltiplichiamo $(*)$ per λ_1: $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_1 v_r = 0$ $\Big\}$ $-$

[se $\lambda_1 = 0$, scegliamo un altro λ_i]

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \dots + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_1) v_r = 0.$$

Per ipotesi di induzione, $v_2, \dots, v_r$ sono indipendenti

Quindi $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_1) = 0$ $i = 2, \dots, r$. Ma $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$ $\forall i$ $\Rightarrow$

$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 0$ $\Rightarrow$ dopo $(*)$ $\alpha_1 v_1 = 0$.

Ma $v_1 \neq 0$ $\Rightarrow$ anche $\alpha_1 = 0$.

Come trovare gli autovalori?

$\underset{\neq 0}{v}$ autovettore di φ per λ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\varphi(v) = \lambda v$ $\Leftrightarrow$ $\varphi(v) - \lambda v = 0$

$\Leftrightarrow (\varphi - \lambda \cdot id) v = 0$.

Quindi λ autovalore di φ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot id) \neq 0$.

Ma abbiamo visto: se A è la matrice di φ rispetto ad una base

$\Rightarrow$ $A - \lambda I$ è la matrice di $\varphi - \lambda \cdot id$, e

$\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot id) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

Def. Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, il polinomio caratteristico di A è

$P_A(t) := \det(A - t \cdot I) \in \mathbb{R}[X]$ [t è una variabile]

[Spesso $P_A(t)$ si definisce come $\det(t \cdot I - A)$; la differenza è solo un segno.]

Conclusione: λ è autovalore di φ $\Leftrightarrow$ λ radice di $P_A(t)$

dove A = matrice di φ rispetto ad una base.

Oss. Infatti, $p_A(t)$ dipende solo da φ, non da A.

La matrice di φ rispetto ad un altra base è PAP^{-1}

[P = matrice di cambiamento di basi]

$$p_{PAP^{-1}}(t) = \det(PAP^{-1} - t\cdot I) = \det(PAP^{-1} - t\cdot PP^{-1})$$
$$= \det(P(A - t\cdot I)P^{-1}) = \cancel{\det}(P)\det(A - tI)\cancel{\det}(P^{-1})$$
$$= \det(A - tI) = p_A(t).$$

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(t) = \det \begin{bmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-t \end{bmatrix}$

Vediamo: $\deg p_A(t) = n$.

Esempi. 1) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$p_A(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 0 & -1-t \end{bmatrix} = (1-t)(-t)(-1-t)$$

Autovalori: $1, 0, -1$. Distinti $\Rightarrow \varphi$ diagonalizzabile.

Cerchiamo gli autovettori per trovare la "buona" base:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} x+y = x \\ z = y \\ -z = z \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 0 \\ y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
e multipli.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} x+y = 0 \\ z = 0 \\ -z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e multipli.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} x+y = -x \\ z = -y \\ -z = -z \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ e multipli.}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad p_A(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t)^3$

1 solo autovalore!

3)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_A(t) = \det \begin{bmatrix} -t & 3 & 0 \\ 1 & -2-t & 0 \\ 1 & -3 & 1-t \end{bmatrix} =$$

$$= (1-t) \begin{vmatrix} -t & 3 \\ 1 & -2-t \end{vmatrix} = (1-t)(t^2+2t-3) =$$

$$= (1-t)(t-1)(t+3) = -(t-1)^2(t+3)$$

Autovalori: $1, -3$

Autovettori per 1:
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 3y &= x \\ x-2y &= y \\ x-3y+z &= z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 3y \Rightarrow \dim(V_1) = \dim\left(\operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto x-3y\right)\right) = 3-1 = 2$$

Una base di V_1: $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Autovettori per -3:
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 3y &= -3x \\ x-2y &= -3y \\ x-3y+z &= -3z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = -y, \quad -4y = -4z \Rightarrow x = -y = -z \Rightarrow \dim V_{-3} = 1$$

Una base di V_{-3}: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Insomma: A è diagonalizzabile

nella base $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dove diventa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

2) [cont.] Autovettori per 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} x+y &= x \\ y+z &= y \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = z = 0$$

$\rightarrow$ autovettori multipli di $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ NON DIAGONALIZZABILE

4) Per quali valori del parametro $\underline{\underline{a}}$ è la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$$ diagonalizzabile?

$$P_A(t) = \det\begin{bmatrix} 2a-t & 1 & 1 \\ 1 & a-t & 1 \\ -1 & 1 & a-t \end{bmatrix} = (2a-t)\left[(a-t)^2-1\right] -$$

$$-\left[a-t+1\right] + \left[1+a-t\right] = (2a-t)\left[(a-t)^2-1\right]$$

$\Rightarrow$ autovalori: $\quad 2a, \; a+1, \; a-1$

Se $a \neq \pm 1$, autovalori <u>distinti</u> $\Rightarrow$ diagonalizzabile.

$\boxed{a=1}$ autovalori: $2, 2, 0$

* autovettori per 2: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=2x \\ x+y+z=2y \\ -x+y+z=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=-z \\ x=2y=-2z \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mu \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \dim V_2 = 1$

* autovettori per 0: $\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=-z \\ x=0 \end{array} \quad \mu \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \dim V_0 = 1$

$\dim V_2 + \dim V_0 = 2 < 3 \Rightarrow$ non diagonalizzabile!

$\boxed{a=-1}$ autovalori: $-2, 0, -2$

* autovettori per -2: $\left.\begin{array}{l} -2x+y+z=-2x \\ x-y+z=-2x \\ -x+y-z=-2z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=-z \\ x=-2y \end{array}$

$\Rightarrow$ Come sopra $\dim V_{-2} = 1$ & $\dim V_0 = 1$

$\Rightarrow$ non diagonalizzabile!

La considerazione seguente può semplificare i calcoli:

<u>Def.</u> Sia λ un autovalore di φ.

La molteplicità <u>algebrica</u> di λ è la molteplicità di λ come radice di $P_A(t)$

La molteplicità <u>geometrica</u> di λ è $\dim V_\lambda$.

<u>Prop.</u> molteplicità geometrica di $\lambda \leq$ molteplicità algebrica di λ.

<u>Dim.</u> Sia $\dim V = n$, $\dim V_\lambda = r$. Sia $e_1, \dots, e_r$ una base di V_λ. Completiamola in una base di V: $e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n$. Rispetto a questa base la matrice di φ è così:

$$r\left\{\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{matrix} & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right]\right. \quad \begin{matrix} \\ \underbrace{}_{r} \quad \underbrace{}_{n-r}\end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad P_A(t) = \det \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda-t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda-t\end{matrix} & * \\ \hline 0 & B-tI \end{array}\right]$$

$$= \cancel{\det}\ (\lambda-t)^r \det(B-tI) = (\lambda-t)^r P_B(t).$$

[sviluppo rispetto alla prima colonna + induzione]

Quindi molt. algebrica di $\lambda \geq r = \dim V_\lambda$.

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sono gli autovalori distinti di φ, la somma delle molt. algebriche è $n = \dim V$. Quindi $n \geq \sum_{i=1}^m \dim V_{\lambda_i}$ [già visto!] e l'uguaglianza vale $\Leftrightarrow$ φ è diagonalizzabile.

<u>Conclusione</u>: φ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\forall$ autovalore λ di φ molt. algebrica $=$ molt. geometrica.

In particolare, se troviamo λ con molt. geom. $<$ molt. alg $\Rightarrow$ φ <u>non</u> è diagonalizzabile.

Nell'esempio precedente: per $a=1$ basta guardare $\lambda = 2$

$a=-1$ —"— $\lambda = -2$.

---

5) Per quali valori di k è
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
diagonalizzabile?

$$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ k & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right]$$
$$= (2-\lambda)^2(4-\lambda)$$

Autovettori per $\lambda = 2$: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y = 2x \\ x + 3y = 2y \\ kx + 2z = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -y \\ kx = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

se $k \neq 0$, $\dim V_\lambda = 1$ [multipli di $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$]

Se invece $k = 0$, $\dim V_\lambda = 2$. Una base: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Quindi per $k \neq 0$, A non è diagonalizzabile [molt. geom. di 2 $= 1 < 2$]
per $k = 0$ A è diagonalizzabile,
perché $\exists \geq 1$ autovettore per $\lambda = 4$ [trovargli!]
che insieme con $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ forma una base di autovettori.

6) Sia $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo con matrice

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ rispetto alla base standard. È possibile che la matrice di φ rispetto ad un'altra base è

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$?

$$\overline{P_A}(t) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$$P_B(t) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 \quad \text{uguali!}$$

Cerchiamo gli autov~~atori~~ettori di A per 1.

$$\left.\begin{array}{r} 2x = x \\ 3x + y = y \\ 5x + y + z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \Rightarrow \dim V_1 = 1 < 2$$

non diagonalizzabile!

Invece per B: $\left.\begin{array}{l} x + 3z = x \\ y + 4z = y \\ 2z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 0 \\ x, y \text{ arbitrari} \end{array}$

$\Rightarrow$ $\dim V_1 = 2$ e B è diagonalizzabile [con un autovettore di 2]

Quindi B non può essere la matrice di φ in nessuna base, perchè φ non è diagonalizzabile.

<u>Osservazione</u>: La teoria sopra funziona tale quale anche per spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ [stesse definizioni, teoremi...]

Una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definisce una mappa lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto A\cdot v$. Ma anche una mappa lineare $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ [stessa formula, perchè $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$].

Sola differenza: Il polinomio caratteristico ha <u>sempre</u> n radici [non necessariamente distinti]. Quindi su $\mathbb{C}$ ci sono sempre autovalori ed autovettori.

<u>Esempi</u>. 1) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad P_A(t) = \det\begin{bmatrix} -t & -1 \\ 0 & -t \end{bmatrix} = t^2 + 1$

Non ci sono autovalori su $\mathbb{R}$! Ma su $\mathbb{C}$

$t^2 + 1 = (t+i)(t-i)$. Autovalori distinti

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, ma non su $\mathbb{R}$!

Però $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ non è diagonalizzabile neanche su $\mathbb{C}$ [stesso argomento che su $\mathbb{R}$]

2)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad P_A(t) = \det\begin{bmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & -1 & 2-t \end{bmatrix} =$

$= (2-t)\left[\underbrace{(2-t)^2 + 1}_{\text{non ha radici su } \mathbb{R}}\right]$

Quindi su $\mathbb{R}$ $\lambda = 2$ è il solo autovalore, con molteplicità 1 $\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile

Ma su $\mathbb{C}$, $p_A(t) = (2-t)(2+i-t)(2-i-t)$

$\Rightarrow$ autovalori distinti $2,\ 2+i,\ 2-i$ $\Rightarrow$ A diagonalizzabile

Autovettori:

$\boxed{\lambda = 2}$ $\quad \left.\begin{array}{r} 2x = 2x \\ x+2y+z = 2y \\ -y+2z = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=0 \\ x=-z \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e multipli

$\boxed{\lambda = 2+i}$ $\quad \left.\begin{array}{r} 2x = (2+i)x \\ x+2y+z = (2+i)y \\ -y+2z = (2+i)z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ z=iy \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$ e multipli

$\boxed{\lambda = 2-i}$ di maniera simile $x=0$ $z=-iy$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$ e multipli

In questa base la matrice diventa $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$

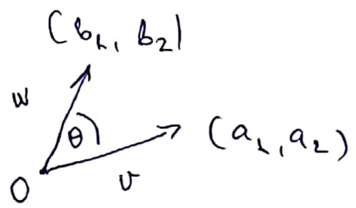
Prodotto scalare

Alla scuola abbiamo visto il prodotto scalare di due vettori piani:

$v \cdot w := \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$

dove θ è l'angolo tra v, w

e $\|v\|$ = lunghezza di v.



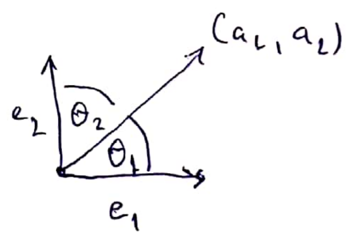
Si osserva: $v \cdot w \in \mathbb{R}$ e $\|v\| = \sqrt{(v \cdot v)} \geq 0$.

Se v ha coordinate (a_1, a_2), w —"— (b_1, b_2) $\Big\} \Rightarrow v \cdot w = a_1 b_1 + a_2 b_2$

[Dimostrazione: se $e_1 = (0,1)$, $e_2 = (1,0)$ è la base standard,

$v \cdot e_1 = \|v\| \cdot 1 \cdot \cos\theta_1 = a_1$

$v \cdot e_2 = \|v\| \cdot 1 \cdot \cos\theta_2 = a_2$



dove $v = a_1 e_1 + a_2 e_2$. Di maniera simile,

$w = b_1 e_1 + b_2 e_2 \Rightarrow w \cdot e_1 = b_1,\ w \cdot e_2 = b_2$.

Quindi $v \cdot w = (a_1 e_1 + a_2 e_2) w = a_1 (e_1 \cdot w) + a_2 \cdot (e_2 \cdot w) = a_1 b_1 + a_2 b_2$]

Def. Siano $v := \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $w := \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ due vettori in $\mathbb{R}^n$.

Il loro <u>prodotto scalare</u> è

$\langle v, w \rangle := a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \in \mathbb{R}$

$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si chiama prodotto scalare <u>standard</u>.

<u>Proprietà</u>

1) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

2) Per $v \in \mathbb{R}^n$ <u>fisso</u> la funzione $w \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ è un'applicazione <u>lineare</u> $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Di maniera simile, per w fisso $v \mapsto \langle v, w \rangle$ è lineare.

3) $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \langle v, v \rangle \geq 0$, e $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.
[Infatti, per v come sopra $\langle v, v \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$.]

Def. Se $v \in \mathbb{R}^n$, la sua <u>norma</u> è $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

<u>Complemento</u>: In generale, se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, un prodotto scalare su V si definisce come una funziona $V \times V \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$ con le proprietà 1), 2), 3).
In generale ci sono molti prodotti scalari su V. Per esempio, se $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$

$(v, w) \mapsto \lambda_1 a_1 b_1 + \dots + \lambda_n a_n b_n$

è un prodotto scalare. Il prodotto standard è il caso $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$. Noi lavoreremo sempre con il prod. standard.

La nozione generale di perpendicolarità è:

Def. $v, w \in \mathbb{R}^n$ sono <u>ortogonali</u> se $\langle v, w \rangle = 0$.
$v_1, \dots, v_r$ è un <u>sistema ortogonale</u> se
$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$.
$v_1, \dots, v_r$ è un sistema <u>ortonormale</u> se è ortogonale e $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ $\forall i$.

Prop. Un sistema ortogonale di vettori è lin. indipendente.

Dim. Sia $v_1, \dots, v_r$ un sistema ortogonale.

Supponiamo $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \quad / \langle -, v_1 \rangle$

$$\alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{=\lambda \neq 0} + \alpha_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\langle v_n, v_1 \rangle}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1 \lambda = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$. Di maniera simile, facendo il prodotto scalare con $v_2, v_3, \dots, v_n$, si ottiene $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$.

Esempio. Se $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\dots$, $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ è la base standard di $\mathbb{R}^n$, allora $e_1, \dots, e_n$ è un sistema ortonormale.

Osservazione: Abbiamo visto che per v fisso la funzione $\varphi_v : w \mapsto \langle v, w \rangle$ è lineare.

Se $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, $\langle v, e_i \rangle = a_i \quad i = 1, \dots, n$.

Viceversa, ogni funzione lineare $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ è determinata da $\varphi(e_1) =: a_1$, $\varphi(e_2) =: a_2, \dots, \varphi(e_n) =: a_n$ perchè se $w = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$, allora

$\varphi(w) = b_1 \varphi(e_1) + b_2 \varphi(e_2) + \dots + b_n \varphi(e_n) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.

Quindi $\varphi(w) = \langle v, w \rangle$, dove $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$!

Conclusione: Per ogni funzione lineare $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\exists v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(w) = \langle v, w \rangle \ \forall w \in \mathbb{R}^n$, quindi $\varphi = \varphi_v$.

Osservazione: Sia $v \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo $\varphi_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Allora

$\mathrm{Ker}(\varphi_v) = \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0 \}$

Notazione: $\mathrm{Ker}(\varphi_v) =: \langle v \rangle^{\perp}$.

Terminologia: $\langle v \rangle^{\perp}$ è il sottospazio ortogonale a v.

Se $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$,

$$\langle v \rangle^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 0 \right\}$$

quindi $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ è soluzione di $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$.

Generalizzazione: Se $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp &:= \operatorname{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \operatorname{Ker}(\varphi_r) \\ &= \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle = \dots = \langle v_r, w \rangle = 0 \} \\ &= \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w\rangle = 0 \quad \forall\, v \in \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_r) \} \\ &\uparrow \end{aligned}$$

[Infatti, se $v_q = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r$,

$\langle v, w \rangle = \alpha_1 \langle v_1, w\rangle + \dots + \alpha_r \langle v_r, w\rangle = 0$]

Se $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \dots, v_r = \begin{bmatrix} a_{r1} \\ a_{r2} \\ \vdots \\ a_{rn} \end{bmatrix}$,

$\langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp =$ soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rn} x_n &= 0. \end{aligned}$$

Esempio. Siano $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Troviamo il sottospazio $\langle v, w \rangle^\perp$. Dopo la ricetta sopra, è il sottospazio delle soluzioni di

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

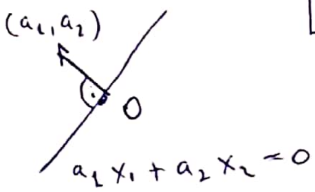
Troviamo una base:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_4 \\ x_2 &= -x_3 - x_4 \end{aligned}$$

Soluzione generale: $\begin{bmatrix} s \\ -s-t \\ t \\ s \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=: v_1} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: v_2}$

$\Rightarrow v_1, v_2$ è una base di $\langle v, w \rangle^\perp$.

Interpretazione geometrica: se $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$,



$\langle v \rangle^\perp$ = retta di equazione $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$

[perpendicolare a $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$]

Se $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\langle v \rangle^\perp$ = piano di equazione $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ (perpendicolare a v)

Teorema. Ogni sottospazio $V \subset \mathbb{R}^n$ ammette una base ortonormale. [=: ON]

Dim. Induzione su dim V.

$\dim V = 0, 1$: ovvio. Supponiamo $\dim V = m$ e il teorema conosciuto per $m-1$. Sia $v \neq 0$ un vettore di V. Poniamo:

$\langle v \rangle^\perp := \{ w \in V : \langle v, w \rangle = 0 \}$. Allora

$\langle v \rangle^\perp = \ker(\varphi_v)$, dove $\varphi_v : w \mapsto \langle v, w \rangle \quad \forall w \in V$.

Come $v \neq 0$, $\mathrm{Im}(\varphi_v) = \mathbb{R} \Rightarrow \dim \langle v \rangle^\perp = m-1$.

Per ipotesi di induzione, $\langle v \rangle^\perp$ ammette una base ortonormale $v_2, \dots, v_m$. Sia $v_1 := \frac{v}{\|v\|}$. Allora $\|v_i\| = 1 \ \forall i$ e $v_1, \dots, v_m$ è una base ortonormale di V [infatti, $\langle v_1, v_i \rangle = 0$ $i > 1$ perché $v_i \in \langle v \rangle^\perp$ $i > 1$ e $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ $i \neq j > 1$ per ipotesi}

Quindi $v_1, \dots, v_m$ è un sistema ortogonale $\Rightarrow$ lin. indipendente di m vettori in V.]

Cor. Sia $v_1, \dots, v_r$ un sistema ortonormale in $\mathbb{R}^n$. Allora $\exists\, v_{r+1}, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$: $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ è una base ON di $\mathbb{R}^n$

Dim. Dopo il teorema $\langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp$ ammette una base ON $v_{r+1}, \dots, v_m$. Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$, $v \mapsto \begin{bmatrix} \langle v, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_r \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r$

Allora $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r)$ è la base standard di $\mathbb{R}^r$.

Quindi $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = n - \dim \mathrm{Im}(\varphi) = n - r$.

Ma $\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp \Rightarrow m = n$ e $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ è una base ON di $\mathbb{R}^n$.

La dimostrazione dà anche:

Cor. $\dim \langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp = n - r$.

Se $V \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio, sia $V^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0 \ \forall v \in V\}$

<u>Cor.</u> $V \cap V^\perp = \{0\}$ e $\mathrm{Span}(V, V^\perp) = \mathbb{R}^n$. In particolare,
$\dim V + \dim V^\perp = n$.

<u>Dim.</u> Se $v \in V \cap V^\perp$, $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$. Per il resto, sia $v_1, \dots, v_r$ una base ON di V. Allora $V^\perp = \langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp$ e si applica il Cor. precedente.

A che serve una base ON di $\mathbb{R}^n$?

<u>Prop.</u> Se $v_1, \dots, v_n$ è una base ON di $\mathbb{R}^n$, allora $\forall v \in \mathbb{R}^n$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$$

<u>Dim.</u> Come $v_1, \dots, v_n$ è una base, $\exists !\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$:
$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Ma allora

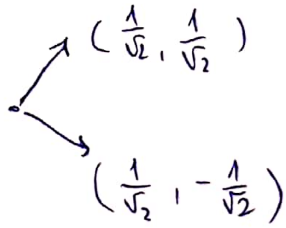
$$\langle v, v_i \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_i \rangle = \alpha_i$$

perché $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ $i \neq j$ e $= 1$ $i = j$.

Quindi <u>il prodotto scalare dà le coordinate</u> di un vettore rispetto ad una base ON.

<u>Esempi.</u> 1) La base standard di $\mathbb{R}^n$ è ON, notiamola $e_1, \dots, e_n$.
Se $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $a_i = \langle v, e_i \rangle$.

2) $\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{=: u_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{=: u_2}$ è una base ON di $\mathbb{R}^2$



[Infatti, $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ e $\langle u_1, u_1 \rangle = \langle u_2, u_2 \rangle = 1$.]

Cerchiamo le coordinate di $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ rispetto a u_1, u_2: $\langle e_1, u_1 \rangle = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\langle e_1, u_2 \rangle = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Di maniera simile, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Come trovare esplicitamente una base ON in $V \subset \mathbb{R}^n$?

<u>dim $V = 1$</u>: se $V = \langle v \rangle$, $\bar{v}_1 := \frac{v}{\|v\|}$ è una base ON.

<u>dim $V = 2$</u>: se v_1, v_2 base di V, $\bar{v}_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ come sopra

$w_2 := v_2 - \langle \bar{v}_1, v_2 \rangle \bar{v}_1$ soddisfa

$\langle w_2, \bar{v}_1 \rangle = \langle v_2, \bar{v}_1 \rangle - \langle v_2, \bar{v}_1 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle}_{1} = 0.$

Quindi se $\bar{v}_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|}$, $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ è una base ON

<u>dim $V = 3$</u>: Se v_1, v_2, v_3 base di V, cambiamo $v_1 \rightsquigarrow \bar{v}_1$, $v_2 \rightsquigarrow \bar{v}_2$ tali che $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ base ON di $\langle v_1, v_2 \rangle$ [possibile, l'abbiamo visto nel caso dim $V = 2$.] Sia

$w_3 := v_3 - \langle v_3, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 - \langle v_3, \bar{v}_2 \rangle \bar{v}_2$. Allora

$\langle w_3, \bar{v}_1 \rangle = \langle v_3, \bar{v}_1 \rangle - \langle v_3, \bar{v}_1 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle}_{1} - \langle v_3, \bar{v}_2 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle}_{0} = 0,$

$\langle w_3, \bar{v}_2 \rangle = \langle v_3, \bar{v}_2 \rangle - \langle v_3, \bar{v}_1 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle}_{0} - \langle v_3, \bar{v}_2 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle}_{1} = 0$

$\Rightarrow$ Se $\bar{v}_3 := \frac{w_3}{\|w_3\|}$, $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ base ON

<u>Caso generale</u> dim $V = n$: se $v_1, \dots, v_n$ base di V possiamo successivamente modificarla:

$v_1 \rightsquigarrow \bar{v}_1$ base ON di $\langle v_1 \rangle$

$v_1, v_2 \rightsquigarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2$ — " — $\langle v_1, v_2 \rangle$

$\vdots$

$v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rightsquigarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ base ON di $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$

$w_n := v_n - \langle v_n, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 - \langle v_n, \bar{v}_2 \rangle \bar{v}_2 - \dots - \langle v_n, \bar{v}_{n-1} \rangle \bar{v}_{n-1}.$

Come sopra, si verifica che con $\bar{v}_n := \frac{w_n}{\|w_n\|}$ $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ è una base ON di V.

Questo è <u>l'algoritmo</u> di <u>Gram</u> - <u>Schmidt</u>.

Esempi. 1) Sia $V = \mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}}_{v_2}\right) \subset \mathbb{R}^3$

Gram-Schmidt:

$\|v_1\| = \sqrt{2} \Rightarrow \bar{v}_1 := \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$

$\langle v_2, \bar{v}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow w_2 := v_2 - \langle v_2, \bar{v}_1\rangle \bar{v}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\1\end{bmatrix}$

$\|w_2\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \bar{v}_2 := \begin{bmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\\sqrt{2}/\sqrt{3}\end{bmatrix}$ e $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ base ON

2) $V = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^3$. Gram-Schmidt dà una base ON di V abbastanza brutta (si può provare!) (*)

Ma si può anche osservare che

$V = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0 \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ base ON

Quindi Gram-Schmidt produce <u>una</u> base ON, non necessariamente la più semplice!

3) $V = \mathrm{Span}(u_1, u_2) \subset \mathbb{R}^3$, $u_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix}4\\0\\-1\end{bmatrix}$ Gram-Schmidt:

$\|u_1\| = \sqrt{2}$, $\bar{v}_1 := \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$ come sopra.

$\langle u_2, \bar{v}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_2, u_1\rangle = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$w_2 := \begin{bmatrix}4\\0\\-1\end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\\-1\end{bmatrix}$ $\|w_2\| = 3$

$\Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{bmatrix}2/3\\-2/3\\-1/3\end{bmatrix}$ soddisfa $\|\bar{v}_2\| = 1$ e $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ base ON.

Cerchiamo di completarla in una base ON di $\mathbb{R}^3$:

$V^\perp$ è il sottospazio dei soluzioni di $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 = -x_2 = \frac{x_3}{4} \Rightarrow w = \begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix}$ base di $V^\perp$.

$\|w\| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 := \begin{bmatrix}1/3\sqrt{2}\\-1/3\sqrt{2}\\4/3\sqrt{2}\end{bmatrix}$ base ON di $\mathbb{R}^3$.

(*) Soluzione: $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$ $\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{28 - 18\sqrt{2}}} \cdot \begin{bmatrix}2\sqrt{2} - 3\\\sqrt{2} - 3\\0\end{bmatrix}$

Il teorema spettrale

Def. $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j$.
$A = [a_{ij}]$ Formulazione equivalente: $A = A^T$ dove A^T = matrice trasposta.

Lemma. Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è simmetrica, allora $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ vale
$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ con il prodotto scalare standard.

Dim. Siano $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ $w = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

$$Av = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + \dots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + \dots + a_{nn}b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \langle Av, w\rangle = \begin{cases} a_{11}b_1c_1 + \dots + a_{1n}b_nc_1 + \\ a_{21}b_1c_2 + \dots + a_{2n}b_nc_2 + \dots \\ \vdots \\ a_{n1}b_1c_n + \dots + a_{nn}b_nc_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle Av, w\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, b_j c_i$$

In modo simile, $\langle v, Aw\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, c_j b_i$

Come $a_{ij} = a_{ji}$, questi sono uguali.

Teorema spettrale per matrici simmetriche:
Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è simmetrica, ogni autovalore di A è reale, ed A è diagonalizzabile in una base ON di autovettori.

Quindi una matrice simmetrica è sempre diagonalizzabile!

Un'applicazione:

Cor. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica tale che ogni autovalore di A è ≥ 0. Allora $\exists \sqrt{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$:
$$(\sqrt{A})^2 = A.$$

Dim. Se $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ è diagonale, si prende

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$$ [possibile perché $\forall \lambda_i \geq 0$]

Nel caso generale $\exists P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertibile : $D = P^{-1}AP$ è diagonale (dopo il teorema spettrale). Abbiamo appena visto: $\sqrt{D}$ esiste. Quindi $\sqrt{A} := P\sqrt{D}P^{-1}$ soddisfà

$$(\sqrt{A})^2 = P\sqrt{D}P^{-1}P\sqrt{D}P^{-1} = P\sqrt{D}\sqrt{D}P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Oss. $\sqrt{A}$ non esiste sempre! Infatti, se $n=1$, $A=[a]$ e $\sqrt{A}$ esiste solo se $a \geq 0$. In generale, se $A = B^2 \Rightarrow \det(A) = \det(B)^2$ $\Rightarrow \sqrt{A}$ non esiste se $\det(A) < 0$.

Una parte della dimostrazione del teorema è data dalla

Prop. Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ha autovalori reali e soddisfà $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle \ \forall v, w \Rightarrow \exists$ base ON di autovettori di A.

Si ricorda che se A è simetrica, $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ vale (Lemma).

Dim. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di A e v autovettore: $Av = \lambda v$. Scambiando $v \rightsquigarrow \frac{v}{\|v\|}$ si può suppore $\|v\| = 1$.

Induzione su n: per $n=1$ v base ON. Se $n>1$, sia $V := \langle v\rangle^{\perp}$. Si osserva: $\forall w \in V \quad Aw \in V$. Infatti,

$\langle v, Aw\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle = 0$ perchè $w \in \langle v\rangle^{\perp}$.

Ma allora $Aw \in \langle v\rangle^{\perp}$, i.e. $Aw \in V$.

Come $\dim V = n-1$, $\exists$ base ON di autovettori $v_2, \dots, v_n$ per A come applicazione lineare su $V (\simeq \mathbb{R}^{n-1})$. Allora $v, v_2, \dots, v_n$ è base ON per A su $\mathbb{R}^n$.

Resta da dimostrare che gli autovalori di una matrice simetrica sono reali. Per questo bisogna passare a $\mathbb{C}^n$.

Def. Prodotto scalare standard su $\mathbb{C}^n$:

Se $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$

$\langle v, w\rangle := a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + \dots + a_n\bar{b}_n$ [$\bar{\ }$ = coniugazione complessa $a+bi \mapsto a-bi$]

Norma di $v \in \mathbb{C}^n$:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2}$$

Da notare: se $v, w \in \mathbb{R}^n$, questo è il prodotto scalare stand. su $\mathbb{R}^n$.

Proprietà: simili al prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$, ma:

* $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$
* $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$ per $\lambda \in \mathbb{C}$, ma $\langle v, \lambda w\rangle = \bar{\lambda}\langle v, w\rangle$.

Prop. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, considerata come matrice in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Allora $\forall v, w \in \mathbb{C}^n$ $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$.

Dimostrazione: come nel caso di $\mathbb{R}^n$, utilizzando che $a_{ij} = a_{ji} = \overline{a_{ji}}$.

Cor. Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, ogni autovalore di A è reale.

Dim. Lavoriamo su $\mathbb{C}^n$: sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore, $v \in \mathbb{C}^n$ un autovettore. Allora $Av = \lambda v$, quindi

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$$

Come $v \neq 0$, $\langle v, v\rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$.

Complemento: Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matrice tale che $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $\forall i,j$. [Tale matrice si chiama autoaggiunta o Hermitiana]. Allora i stessi argomenti mostrano: gli autovalori di A sono reali ed A è diagonalizzabile in una base ON di $\mathbb{C}^n$. [Forma complessa del teorema spettrale.]

Esempio: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ Vediamo subito: A simmetrica $\Rightarrow$ diagonalizzabile

Di più, colonne di A dipendenti $\Rightarrow$ rango$(A) < 3$ (infatti $= 1$ $\Downarrow$ $\dim \operatorname{Ker}(A) = 2$)
$\Rightarrow \operatorname{Ker}(A) \neq 0 \Rightarrow 0$ autovalore.

Quindi c'è un terzo autovalore. Troviamolo insieme con un autovettore:

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda y = -2\lambda x = -\lambda z \Rightarrow w := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ autovettore

$\|w\| = 3 \Rightarrow \frac{w}{\|w\|} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$ ha norma 1. $\Rightarrow \lambda = -1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 = 7$

Resta da trovare una base ON di $\operatorname{Ker}(\varphi) = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : -x + 2y - 2z = 0\right\}$

Una base: $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (sono lin. indep., e Ker ha dimensione 2)

Gram-Schmidt: $\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\langle \tilde{v}_1, v_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow w_2 = v_2 - \langle v_2, \tilde{v}_1\rangle \tilde{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{v}_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot w_2.$