Prop. Se $v_1, \dots, v_n$ è una base di V, $\forall v \in V$ si scrive come combinazione lineare $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ di <u>maniera</u> <u>unica</u>.

Def. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sono le coordinate di v rispetto alla base.

Esempio: Le coordinate di $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base standard sono a_1, a_2:
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stessa cosa in generale:
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + a_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Osservazione: L'ordine di $v_1, \dots, v_n$ è importante! Se cambiamo $v_1, v_2 \Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2$ si cambiano!

Esempio: Abbiamo visto che
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
sono linearmente indipendenti. Vedremo che 3 vettori indip. in $\mathbb{R}^3$ formano sempre una base. Ma non lo sappiamo ancora, quindi verifichiamolo:

$$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 2 & 0 & 0 & b_2 \\ 3 & 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_3 - 3b_1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 - 3b_1 - (b_2 - 2b_1) \end{bmatrix}$$

L'ultima colonna è senza pivot $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in$ Span delle primi 3 colonne. $\Rightarrow$ sono una base.

Troviamo addesso le coordinate di $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ rispetto a questa base.

Dobbiamo trovare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: $\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\Longleftrightarrow$ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ soluzione del sistema <u>inomogeneo</u>

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ 2\lambda_1 + \quad = 2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

Gauss-Jordan: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right]$

$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 1, 0)$.

<u>Esercizio</u>: Si verifichi che $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e trovare le coordinate del vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ 3 pivots!

$\overset{\text{Gauss}}{\underset{\text{Jordan}}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, -5/2, 2)$

Trovare le coordinate $\Longleftrightarrow$ risolvere un sistema <u>inomogeneo</u>.

Esempio. In $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\quad 1, x, x^2$ è una base.
Verifichiamo che anche $\quad 1, 1+x, (1+x)^2$ è una base.

Lin. indip: $\quad \lambda_1 + \lambda_2(1+x) + \lambda_3(1+2x+x^2) = 0$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$
$$\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

Generatori: Si dimostra che $1, \overset{x}{\cancel{1+x}}, \overset{x^2}{\cancel{(1+x)^2}} \in \mathrm{Span}(1, 1+x, (1+x)^2)$

$$1 = 1 \cdot 1 + 0(1+x) + 0(1+x)^2$$
$$x = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (1+x) + 0(1+x)^2$$
$$x^2 = 1 \cdot 1 + (-2)(1+x) + 1 \cdot (1+x)^2$$

Coordinate di $1, 1+x, (1+x)^2$ rispetto a $(1, x, x^2)$:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}. \qquad \text{Viceversa: } \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

Si vede che questi vettori colonna sono indip $\Rightarrow$ basi di $\mathbb{R}^3$.
Quindi avendo fissato ~~fissando~~ una base, i vettori si comportano come in $\mathbb{R}^n$!

Dimensione

Prop. Sia V un spazio vettoriale che ammette una base $e_1, \dots, e_n$. Allora ogni sistema $v_1, \dots, v_r$ con $\boxed{r > n}$ è lin. dipendente.

Dim. per $n = 2$.

Prima osservazione: se la prop. vale per $r = 3$, allora vale per $r > n$ generale. Infatti, se $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ è una comb. lineare non banale,

allora $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + 0 \cdot v_4 + 0 \cdot v_5 + \dots + 0 \cdot v_r = 0$
è una comb. non banale (perchè λ_1, λ_2 o λ_3 è $\neq 0$).

Quindi siano $n = 2$, $r = 3$, e_1, e_2 una base di V.
Come $V = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$, $v_1, v_2, v_3 \in \mathrm{Span}(e_1, e_2)$. Quindi

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_{11} e_1 + a_{12} e_2 \\ v_2 &= a_{21} e_1 + a_{22} e_2 \\ v_3 &= a_{31} e_1 + a_{32} e_2 \end{aligned}\right\} (*)$$

Dobbiamo trovare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, non tutti $= 0$ tali che
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Facciamo la sostituzione di $(*)$:

$$\lambda_1 (a_{11} e_1 + a_{12} e_2) + \lambda_2 (a_{21} e_1 + a_{22} e_2) + \lambda_3 (a_{31} e_1 + a_{32} e_2) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31}) e_1 + (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{22}) e_2 = 0$$

Ma e_1, e_2 sono lin. indipendenti, quindi

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} &= 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} &= 0. \end{aligned}\right. \quad (+)$$

Questo è un sistema omogeneo di equazioni per $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ con matrice di coefficienti

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Se faccio l'algoritmo di Gauss, ottengo ≤ 2 pivots [ci sono solo due righe] $\Rightarrow$ ci sarà ≥ 1 colonna senza pivot $\Rightarrow$ il sistema avrà ∞ di soluzioni $\Rightarrow$ ci sarà una soluzione <u>non banale</u> $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Ma se $(+)$ ha una soluzione non banale $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ $\Rightarrow$ anche $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ sarà una combinazione non banale $\Rightarrow$ SONO HAPPY.

La dimostrazione per n, r generale è la stessa: alla fine ottengo un sistema lineare di n equazioni in $r > n$ variabili $\Rightarrow$ c'è sempre una soluzione non banale.

Cor. 1. Sia $e_1, \dots, e_n$ una base di V.
Se $v_1, \dots, v_n$ è un sistema lin. indipendente
$\Rightarrow$ anche $v_1, \dots, v_n$ è una base di V.

Dim. Dobbiamo dimostrare: $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = V$.
Sia $v \in V$. Dopo la proposizione, il sistema di $n+1$ vettori $v_1, \dots, v_n, v$ è lin. dipendente.
Quindi $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ non tutti $= 0$ tali che
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v = 0$. $(*)$
Se $\lambda_{n+1} = 0$, allora $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ perché $v_1, \dots, v_n$ sono indipendenti
$\Rightarrow$ ↯ con $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ non tutti $= 0$.
Quindi $\lambda_{n+1} \neq 0$. Ma allora $(*)$ mi dà

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) v_n \Rightarrow v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n).$$

Questo vale per ogni $v \in V \Rightarrow V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$.

Cor. 2. Se $v_1, \dots, v_r$ ed $e_1, \dots, e_n$ sono due basi di V
$\Rightarrow \boxed{r = n}$

Dim. Se $r > n$, $v_1, \dots, v_r$ è lin. dipendente dopo la prop. se $e_1, \dots, e_n$ è una base. Quindi $r \leq n$.
Se $r < n$ e $v_1, \dots, v_r$ è una base $\Rightarrow e_1, \dots, e_n$ è lin. dipendente ↯. Dunque $r = n$.

Def. Se V ammette una base $e_1, \dots, e_n$,
n è la dimensione di V. [ben definita secondo Cor. 2.]

Cor. 3. Se la dimensione di V è n [NOTAZIONE: $\dim V = n$] e $v_1, \dots, v_m$ sono vettori lin. indipendenti con $\boxed{m < n}$ $\Rightarrow$ $\exists\, w_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n$: $v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n$ sono una base di V.

Dim. $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$ non può essere V, perchè se $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m) = V \Rightarrow v_1, \dots, v_m$ è una base, ma $m < n$ e $\dim V = n$ ↯

Quindi $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m) \neq V \Rightarrow \exists\, w_{m+1} \in V$: $w_{m+1} \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$. Ma allora $v_1, \dots, v_m, w_{m+1}$ sono lin. indipendenti: se

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} v_{m+1} = 0,$$

λ_{m+1} non può essere 0 come nella dim. del Cor. 1.

Ma allora $v_{m+1} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}}\right) v_1 + \dots + \left(\frac{-\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right) v_m \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$ ↯

Per ricapitolare: Se $\dim V = n$ e $v_1, \dots, v_r \in V$

$\boxed{r > n}$ $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_r$ sono lin. dipendenti.

$\boxed{r = n}$ e $v_1, \dots, v_n$ lin. indipendente $\Rightarrow$ è una base.

$\boxed{r < n}$ e $v_1, \dots, v_r$ lin. indipendente $\Rightarrow$ si completa in una base di V.

Esempio: a) Decidiamo se

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$ se sono indipendenti, formano una base.

Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 pivots $\Rightarrow$ vettori dipendenti. Però i pivots sono nelle colonne 1, 3 $\Rightarrow$ $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ indipendenti!

b) Completiamo questa sistema indipendente in una base. $\dim \operatorname{Span}(v_1, v_2) = 2$, $\dim \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ basta trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ non contenuto in $\operatorname{Span}(v_1, v_2)$.

Come trovarlo? Idea: $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è la base standard.

Se $e_1, e_2, e_3 \in \operatorname{Span}(v_1, v_2) \Rightarrow \operatorname{Span}(e_1, e_2, e_3) \subset$
$\subset \operatorname{Span}(v_1, v_2)$.

Ma $\operatorname{Span}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ impossibile!

Quindi (almeno) uno di $e_1, e_2, e_3 \notin \operatorname{Span}(v_1, v_2)$.

Cerchiamo quello.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 pivots $\Rightarrow$ e_3 buono!

Ma per esempio e_1 non è buono!

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Solo due pivots!

Questa idea funziona in generale!

Prop. [$\dim V < \infty$] Sia $W \subset V$ un sottospazio. Allora
1) $\dim W \leq \dim V$.
2) Se $W \neq V$, allora $\dim W < \dim V$.

Dim. 1) Sia $w_1, \dots, w_r$ una base di W. Se $r > \dim V$
[Prop. p. 18] $\Rightarrow$ $w_1, \dots, w_r$ dipendenti in V $\Rightarrow$ anche in W.
2) Se $r = \dim V$ $\Rightarrow$ $w_1, \dots, w_r$ base anche di V
$\Rightarrow$ $\mathrm{Span}(w_1, \dots, w_r) = V$ $\Rightarrow$ $V = W$.

La prop. è molto utile per calcolare dimensioni di sottospazi.

Esempio: Sia $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}$ matrici simmetrici

$\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$ [base standard!]

$V \neq M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim V \leq 3$. Ma

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sono indipendenti [facile] $\Rightarrow \dim V = 3$.

Esempio: a) $V = \{ f \in \mathbb{R}[x] : \deg(f) \leq 3, f(1) = 0 \}$ sottospazio di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$V \subsetneq \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \Rightarrow \dim V < \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 3} = 4$
[$1, x, x^2, x^3$ base]

Ma $x-1, x^2-1, x^3-1 \in V$ e sono indipendenti [facile] $\Rightarrow \dim V \geq 3 \Rightarrow \dim V = 3$.

b) $W = \{ f \in \mathbb{R}[x] : \deg(f) \leq 3, f(1) = f(2) = 0 \}$

$W \subsetneq V$ sottospazio $\Rightarrow \dim W \leq 2$.

Ma $(x-1)(x-2), (x-1)^2(x-2) \in W$

e sono indipendenti [ovvio] $\Rightarrow \dim W = 2$.

$(x-1)(x-2), (x-1)^2(x-2)$ è una base di W

Si completa in una base di V:
$x-1, (x-1)(x-2), (x-1)^2(x-2)$

E di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$: $1, x-1, (x-1)(x-2), (x-1)^2(x-2)$.

La formula di Grassmann

Def. Siano $V_1, V_2 \subset V$ due sottospazi.

$$V_1 + V_2 := \{ v_1 + v_2 : v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2 \}$$ la somma di V_1, V_2

Oss. $V_1 + V_2 \subset V$ è un sottospazio.

Dim. Se $v, w \in V_1 + V_2$,

$$\left.\begin{array}{ll} v = v_1 + v_2 & (v_i \in V_i) \\ w = w_1 + w_2 & (w_i \in V_i) \end{array}\right\} \Rightarrow v + w = \underbrace{(v_1 + w_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(v_2 + w_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v = \lambda(v_1 + v_2) = \underbrace{\lambda v_1}_{\in V_1} + \underbrace{\lambda v_2}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$.

Altri notazioni: $\langle V_1, V_2 \rangle$, $\mathrm{Span}(V_1, V_2)$. Infatti:

Prop. Se $v^1, v^2, \dots, v^n \in V_1 + V_2 \Rightarrow \mathrm{Span}(v^1, \dots, v^n) \subset V_1 + V_2$.

Dim. $V_1 + V_2$ è un sottospazio che contiene $v^1, \dots, v^n \Rightarrow$ contiene le loro combinazioni lineari.

Esempi 1) $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$, $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ sottospazi:

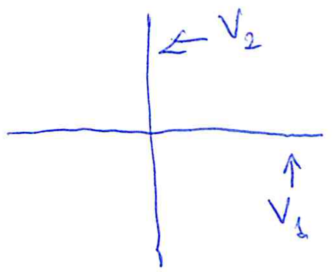
$$V_1 + V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2.$$

2) $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} : a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$, $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$, ma anche $V_1 \cap V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} : a_2 \in \mathbb{R} \right\}$

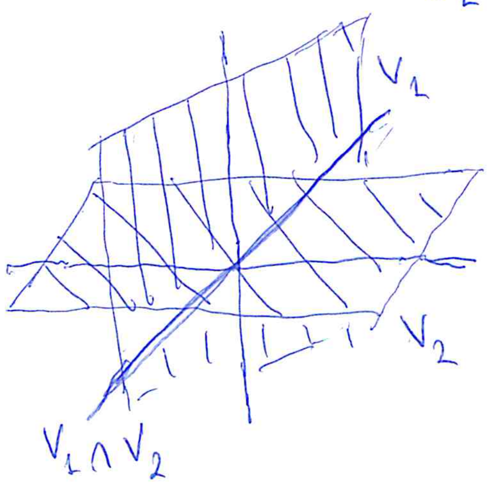
Geometricamente:

1)



$V_1 + V_2$ non è una riunione!!

2)



V_1, V_2 due piani in $\mathbb{R}^3$, $V_1 \cap V_2$ una retta, $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$

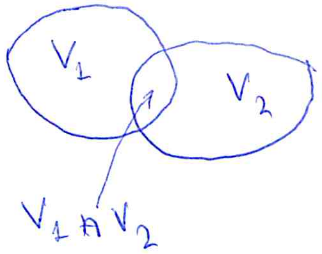
Teorema. Se $\dim V < \infty$, $V_1, V_2 \subset V$ sottospazi,

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

[Formula di Grassmann.]

Nei esempi precedenti: 1) $2 = 1 + 1 - 0$, 2) $3 = 2 + 2 - 1$.

Dim.



Sia $e_1, \dots, e_r$ una base di $V_1 \cap V_2$. Si completa in una base
$e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ di V_1
$e_1, \dots, e_r, w_{r+1}, \dots, w_m$ di V_2.

Quindi $\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$, $\dim V_1 \cap V_2 = r$.

Verifichiamo: $e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n, w_{r+1}, \dots, w_m$ è una base di $V_1 + V_2$. Se vero $\Rightarrow \dim(V_1 + V_2) = n + m - r$ ✓

Indipendenza lineare: Sia

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \mu_1 v_{r+1} + \dots + \mu_{n-r} v_n + \nu_1 w_{r+1} + \dots + \nu_{m-r} w_m = 0$$

Tutti i coefficienti $\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}$. Dobbiamo vedere: tutti $= 0$.

$$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \mu_1 v_{r+1} + \dots + \mu_{n-r} v_n}_{\in V_1} = \underbrace{-\nu_1 w_{r+1} - \dots - \nu_{m-r} w_m}_{\in V_2}.$$

Quindi $-\nu_1 w_{r+1} - \dots - \nu_{m-r} w_m \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow$
come $e_1, \dots, e_r$ è una base di $V_1 \cap V_2$, $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_r$:
$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r = -\nu_1 w_{r+1} - \dots - \nu_{m-r} w_m$. Quindi
$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \nu_1 w_{r+1} + \dots + \nu_{m-r} w_m = 0$.
Ma $e_1, \dots, e_r, w_{r+1}, \dots, w_m$ base di $V_2 \Rightarrow$ lin. indipendenti $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = \boxed{\nu_1 = \dots = \nu_{m-r} = 0.}$

Ma allora

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \mu_1 v_{r+1} + \dots + \mu_{n-r} v_n = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_{n-r} = 0}$$

perché $e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ base di V_1. OK!

$\mathrm{Span}(e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_{n-r}, w_1, \dots, w_{m-r}) = V_1 + V_2$:

Se $v \in V_1 + V_2$, $v = v^1 + v^2$: $v^1 \in V_1$, $v^2 \in V_2$.

Ma allora $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$:

$v^1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \alpha_{r+1} v_1 + \dots + \alpha_n v_{n-r}$

$v^2 = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_r e_r + \beta_{r+1} w_1 + \dots + \beta_m w_{m-r}$

perchè $e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_{n-r}$ base di V_1

$e_1, \dots, e_r, w_1, \dots, w_{m-r}$ base di V_2

$\Rightarrow v_1 = v^1 + v^2 = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + \dots + (\alpha_r + \beta_r) e_r +$

$+ \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n + \beta_{r+1} w_1 + \dots + \beta_m w_m$ ✓

Esempi (vecchi esercizi di compito)

1) In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i sottospazi

$$V = \left\{ \text{soluzioni di } \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$W = \mathrm{Span}\left(w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Calcoliamo $\dim(V \cap W)$, $\dim(V + W)$.

$\dim W = 2$ perchè ovviamente $w_1 \neq \lambda w_2$.

Calcoliamo $\dim V$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}$$

x_3, x_4 variabili liberi $\Rightarrow$
$$\begin{array}{l} x_2 = -x_3 - 3x_4 \\ x_1 = -2(-x_3 - 3x_4) - x_3 \\ \quad = x_3 + 6x_4 \end{array}$$

Sol. generale: $\begin{bmatrix} x_3 + 6x_4 \\ -x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_3 + 6x_4 \\ -x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{w_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{w_2}$$

Quindi $\dim V = 2$ e v_1, v_2 è una base.

Cerchiamo $\dim(V+W)$:

$V + W = \mathrm{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2)$

Troviamo una base con Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \tfrac{1}{3} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 pivots $\Rightarrow$ le prime 3 colonne sono indipendenti

ma v_1, v_2, w_1, w_2 dipendenti $\Rightarrow \dim(V+W) = 3$.

Grassmann: $\dim V \cap W = \underbrace{\dim V}_{2} + \underbrace{\dim W}_{2} - \underbrace{\dim(V+W)}_{3} = 1$.

Ma possiamo anche calcolare $\dim(V \cap W)$ direttamente.

$$V \cap W = \left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ che soddisfano } \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\left.\begin{matrix} (2\lambda_1 + 3\lambda_2) + 2(-2\lambda_2) + (\lambda_1 - 2\lambda_2) = 0 \\ -(2\lambda_1 + 3\lambda_2) + (-2\lambda_2) + 3\lambda_1 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \dim(V \cap W) = 1$

perché $V \cap W = \{ \lambda(w_1 + w_2) : \lambda \in \mathbb{R} \}$.

2) Siano

$$V = \mathrm{Span}\left(\overset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} \right), \quad W = \mathrm{Span}\left(\overset{w_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}} \right)$$

Trovare basi di $V+W$, $V \cap W$.

Per $V+W$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 pivots $\Rightarrow$ $\dim(V+W) = 3$, base: v_1, v_2, w_2.

Grassmann: $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W) = 2+2-3 = 1$.

Quindi ogni vettore di $V \cap W$ è una base se $\neq 0$.

$0 \neq w_1 = v_1 + v_2 \Rightarrow w_1 \in V \cap W$ ed è una base.

Come calcolare $V \cap W$ direttamente? Trovare equazioni per V, W, $V \cap W$.

Per V:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & x_4 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & -2 & x_4 - x_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - x_2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x_3 - x_1 = 0$, $x_4 - x_2 = 0$ $\quad (*)$

Per W:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 2 & x_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 2 & x_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 + \frac{x_2}{2} \\ 0 & 0 & x_4 - x_2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x_3 - x_1 + \frac{x_2}{2} = 0$, $x_4 - x_2 = 0$ $\quad (**)$

Per $V \cap W$: $(*)$ & $(**)$ $\Rightarrow$ $x_3 = x_1$, $x_4 = x_2$

$x_2 = 0$

$\Rightarrow$ $x_3 = x_1$, $x_2 = x_4 = 0$.

Quindi $V \cap W = \{ \lambda w_1 : \lambda \in \mathbb{R} \}$ come l'abbiamo visto.

Metodo con Grassmann più veloce!!

Applicazioni lineari

Def. Siano V_1, V_2 spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Un'<u>applicazione lineare</u> (o mappa lineare) è una mappa $\varphi: V_1 \to V_2$ soddisfando

a) $\varphi(v_1+v_2) = \varphi(v_1)+\varphi(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V_1$

b) $\lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V_1$.

Esempi

1) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ fisso.

Infatti, a) $\lambda_1(a_1+b_1) + \dots + \lambda_n(a_n+b_n) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_n b_1 + \dots + \lambda_n b_n$

b) $\lambda(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_1(\lambda a_1) + \dots + \lambda_n(\lambda a_n)$.

Però non sono lineari:

i) $\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + c$ se $c \neq 0$,

ii) $\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \lambda_1 a_1^2 + \dots + \lambda_n a_n^2$

2) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}^2$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \\ \mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n \end{pmatrix}$$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\mu_1, \dots, \mu_n$ fissi.

Questo esempio si generalizza da 2 a m: mappe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

3) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}^{n-1}$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$ Esempi simili $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-2}$, $\mathbb{R}^{n-3}$ ecc.

4) $V_1 = \mathbb{R}[x]_{\leq d}$ $\quad V_2 = \mathbb{R}[x]_{\leq d-1}$ $\quad \varphi(f) := f'$.

Infatti, $(f_1+f_2)' = f_1' + f_2'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$

Ma si vede anche su $(a_d x^d + \dots + a_0)' = d a_d x^{d-1} + (d-1)a_{d-1}x^{d-2} +$

5) $V_1 = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}, \int_0^1 f < \infty \}$

$V_2 = \mathbb{R} \qquad \varphi(f) := \int_0^1 f.$

Infatti, $\int_0^1 (f_1 + f_2) = \int_0^1 f_1 + \int_0^1 f_2$, $\int_0^1 (\lambda f) = \lambda \int_0^1 f$.

Due sotto-spazi importanti: se $\varphi : V_1 \to V_2$ mappa lineare

$Ker(\varphi) := \{ v \in V_1 : \varphi(v) = 0 \}$ <u>nucleo</u> di φ

$Im(\varphi) := \{ w \in V_2 : \exists\, v \in V_1 \text{ tale che } w = \varphi(v) \}$ <u>immagine</u> di φ

<u>Prop.</u> $Ker(\varphi_1) \subset V_1$, $Im(\varphi) \subset V_2$ sono dei sottospazi.

<u>Dim.</u> <u>Ker</u>: * se $\varphi(v_1) = 0$, $\varphi(v_2) = 0 \Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0$

** se $\varphi(v) = 0$, $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = 0$.

<u>Im</u>: * se $w_1 = \varphi(v_1)$, $w_2 = \varphi(v_2)$,

$w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in Im(\varphi)$.

** se $w = \varphi(v)$, $\lambda w = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in Im(\varphi)$.

<u>Teorema</u>. Se $\dim V_1 < \infty$, $\varphi : V_1 \to V_2$ lin. $\boxed{\dim Ker(\varphi) + \dim Im(\varphi) = \dim V_1.}$

<u>Dim.</u> Sia $v_1, \dots, v_r$ una base di $Ker(\varphi)$ [quindi $\dim Ker(\varphi) = r$]

$w_1, \dots, w_s$ una base di $Im(\varphi)$. [quindi $\dim Im(\varphi) = s$]

Siano $\underbrace{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s}_{\in V_1}$ tali che $\varphi(\bar{v}_1) = w_1, \dots, \varphi(\bar{v}_s) = w_s$.

Dimostriamo che $v_1, \dots, v_r, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s$ è una base di V_1.

[$\Rightarrow$ $\dim V_1 = r + s$, ed il teorema è vero.]

<u>Indipendenza</u>: Supponiamo

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} \bar{v}_1 + \dots + \lambda_{r+s} \bar{v}_s = 0$. Applichiamo φ:

$0 \quad + \varphi(\lambda_{r+1} \bar{v}_1 + \dots + \lambda_{r+s} \bar{v}_s) = 0 \quad [\varphi(v_i) = 0 \ \forall i]$

$\lambda_{r+1} \varphi(\bar{v}_1) + \dots + \lambda_{r+s} \varphi(\bar{v}_s) = 0$

$\lambda_{r+1} w_1 + \dots + \lambda_{r+s} w_s = 0$

$\Rightarrow \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{r+s}$ perché $w_1 \dots w_s$ base

Quindi $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ perché $v_1, \ldots, v_r$ base di $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

In fine, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_{r+s} = 0$ ✓

$\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_r, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_s) = V_1$: sia $v \in V_1$.

$\varphi(v) \in \mathrm{Im}(\varphi) \Rightarrow \exists \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_s : \varphi(v) = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_s w_s$.

Ma allora $\varphi(v - \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 - \ldots - \bar{\lambda}_s \bar{v}_s) =$

$$= \varphi(v) - \bar{\lambda}_1 \underbrace{\varphi(\bar{v}_1)}_{w_1} - \ldots - \bar{\lambda}_s \underbrace{\varphi(\bar{v}_s)}_{w_s} = 0.$$

Quindi $v - \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 - \ldots - \bar{\lambda}_s \bar{v}_s \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Ma allora $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r$: $v - \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 - \ldots - \bar{\lambda}_s \bar{v}_s = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$

perché $v_1, \ldots, v_r$ base di $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

In somma, $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r + \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 + \ldots + \bar{\lambda}_s \bar{v}_s$ ✓

Esempi

1) $V = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0 \right)$ [soluzioni dell'equazione omogenea $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$]

Qui $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ non tutti $= 0$.

Osservazione: $V = \mathrm{Ker}(\varphi)$, dove $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n.$$

Se $a_1, \ldots, a_n$ non tutti $= 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.

[perché $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ è un sottospazio ed i soli sottospazi sono $0, \mathbb{R}$]

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(\varphi) = 1 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = \dim V = \boxed{n-1}$

2) $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq d} \to \mathbb{R}[x]_{\leq d-1} : f \mapsto f'$.

$\dim \mathbb{R}[x]_{\leq d} = d+1$ $[1, x, \ldots, x^d$ base$]$

$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{ f \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} : f' = 0 \} = \{ f = \text{costante} \}$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 1$.

Allora $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = d + 1 - 1 = d \Rightarrow \mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}[x]_{\leq d-1}$.

Infatti, $\left(\frac{a_{d-1}}{d} x^d + \frac{a_{d-2}}{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_0 x \right)' = a_{d-1} x^d + a_{d-2} x^{d-2} + \ldots + a_0$.

Problema: Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'appl. lineare. Conoscendo i valori di φ sulla base standard, come calcolare $\varphi(v)$ per $v \in \mathbb{R}^n$ generale?

Caso $n = m = 2$ Siano $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ la base standard

Se $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare, $\exists\, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ generale, allora come φ è lineare,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = b_1 \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + b_2 \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 \end{bmatrix}$$

Def. Se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n$, loro prodotto è il vettore in $\mathbb{R}^m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{v} := \begin{bmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + \dots + a_{1n} b_n \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \dots + a_{2n} b_n \\ \vdots \\ a_{m1} b_1 + a_{m2} b_2 + \dots + a_{mn} b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Oss. Nel caso precedente $\varphi(v) = Av$, dove $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

In generale, sia $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\dots$, $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ la base standard

Notiamo per $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \varphi\left(\begin{bmatrix} \cancel{a_{1n}}\ 0 \\ \cancel{a_{2n}}\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

e sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Prop. Se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ è un vettore generale,

allora $\varphi(v) = A \cdot v$.

Dim. Stesso argomento: scrivere $v = b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n$

$\Rightarrow \varphi(v) = b_1 \varphi(e_1) + \ldots + b_n \varphi(e_n)$

Ma $\varphi(e_i) =$ colonna N° i di A !!

Esempio. 1) Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = x + 2y + 3z$.

Trovare $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Naturalmente è $1 \cdot 1 + 2(-1) + 3 \cdot 1 = 2$

Ma anche:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3.$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2.$$

2) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

E infatti, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix}$.

Conclusione: Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare,

$e_1, \ldots, e_n$ la base standard

* $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ determina φ di maniera unica

* $\forall v$ possiamo calcolare

$\varphi(v) = A \cdot v$,

dove $A \in M_{\cancel{n \times m}\, m \times n}(\mathbb{R})$ è la matrice definita sopra.

Generalizzazione. Sia $\varphi: V \to W$ lineare.

Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V $\quad [\dim V = n]$

$\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — " — W $\quad [\dim W = m]$

Scriviamo
$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= a_{11} e'_1 + a_{21} e'_2 + \ldots + a_{m1} e'_m \\ \varphi(e_2) &= a_{12} e'_1 + a_{22} e'_2 + \ldots + a_{m2} e'_m \\ &\vdots \\ \varphi(e_n) &= a_{1n} e'_1 + a_{2n} e'_2 + \ldots + a_{mn} e'_m\end{aligned}$$

Def. La matrice di φ rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ è:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Quindi $A = \left[\varphi(e_1) \middle| \varphi(e_2) \middle| \ldots \middle| \varphi(e_n)\right]$ colonne: coordinate di $\varphi(e_i)$ rispetto a $e'_1, \ldots, e'_m$.

Teorema. Se $v = b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n$ è un vettore di V consideriamo il vettore colonna in $\mathbb{R}^n$: $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Allora le coordinate di $\varphi(v)$ rispetto a $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ sono date dal vettore colonna
$$A \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Dim. Come sopra per $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$!

Importante: la matrice A è sempre definita con due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$!

Però nel caso $V = W$, possiamo scegliere $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. In questo caso si parla della matrice di $\varphi: V \to V$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Esempi:

1) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x + 2y.$

Matrice di φ rispetto alle base standard:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \implies A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$$

Addesso consideriamo la base $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$
(e 1 di $\mathbb{R}$)

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3 \implies A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ in questi basi.}$$

2) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + 2y \end{pmatrix}$

Matrice rispetto alla base standard:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \implies A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice rispetto alla base $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \implies A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrice rispetto alla base $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \varphi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \implies A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se scriviamo le coordinate <u>non</u> rispetto alla base standard, ma rispetto a questa base, φ diventa molto semplice: $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x \\ 0 \end{bmatrix}$

Torneremo a questa situazione quando studiamo gli autovettori.

3) $\varphi: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \qquad \varphi(f) = f'$.

Base standard: $1, x, x^2$. Matrice di φ rispetto alla base standard:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \varphi(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \varphi(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In realtà, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$. In $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ prendiamo come base $1, x, x^2$, ma in $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ $2, x+1$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(1) = 0 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot (x+1) \\ \varphi(x) = 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 0\,(x+1) \\ \varphi(x^2) = 2x = (-1)2 + 2(x+1) \end{array}\right\} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4) $\dim V = n$, $\varphi: V \to V \quad \varphi(v) = v \quad \forall v$.

Matrice di φ rispetto ad ogni base $v_1, \dots, v_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$ matrice identità. [Perchè $\varphi(e_i) = e_i \ \forall i$].

Fissiamo $\lambda \in \mathbb{R}$, e sia $\varphi_\lambda: V \to V \quad \varphi_\lambda(v) := \lambda v$.

Matrice di φ_λ rispetto ad ogni base:

$$\begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

Ancora più generalmente, se $\exists$ base $e_1, \dots, e_n$ tale che $\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, \dots, \varphi(e_n) = \lambda_n e_n$ per $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, allora la matrice rispetto a questa base è

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ matrice diagonale.

Vedremo: tale base non esiste sempre, ma in buoni casi sì.

Problema: Sia $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare, di matrice A [rispetto alla base standard]. Come trovare $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$ utilizzando A?

$\mathrm{Ker}(\varphi)$: Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

$v \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff Av = 0 \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ soluzione di $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

Quindi: per trovare $\mathrm{Ker}(\varphi)$, bisogna risolvere il sistema omogeneo [per esempio con Gauss].

$\mathrm{Im}(\varphi)$: Sappiamo che se $e_1, \dots, e_n$ è la base standard,

$\varphi(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \varphi(e_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$

Ma $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Span}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$

[Infatti, se $w \in \mathrm{Im}(\varphi) \overset{def}{\Rightarrow} \exists v \in \mathbb{R}^n : w = \varphi(v)$

Ma $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \Rightarrow w = \varphi(v) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n)$]

Quindi $\mathrm{Im}(\varphi)$ è lo span delle colonne di A in $\mathbb{R}^m$.

Per trovare $\dim \mathrm{Im}(\varphi)$, bisogna determinare la dimensione di questo span.

Def. Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, il rango di A e'

$$\mathrm{rg}(A) := \dim \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right)$$

Conclusione: Se φ ha matrice A, $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{rg}(A)$.

<u>Metodo</u> per calcolare $rg(A)$: Bisogna estrarre una base di Span (colonne).

Facciamo l'algoritmo di Gauss per A.

Abbiamo visto: numero delle colonne lin. indipendenti = numero dei pivots della forma a scalini. <u>Quindi</u>:

Prop. $rg(A)$ = numero dei pivots della forma a scalini.

[Ricordiamo l'argomento: nella forma a scalini le colonne che contengono un pivot sono lin. <u>indipendenti</u>. Aggiungendo una colonna senza pivot abbiamo colonne <u>dipendenti</u> perché il sistema lin. associato ha una soluzione non banale.]

<u>Esempio</u>: Sia $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ di matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Troviamo basi di $Ker(\varphi)$, $Im(\varphi)$.

Gauss: La forma ~~ridotta~~ a scalini è $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pivots nelle primi due colonne $\Longrightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ base di $Im(\varphi)$

[rango = 2]

$Ker\,\varphi \iff$ soluzioni di
$$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$$
$$-x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$\Longrightarrow$ $x_2 = 2x_3 + 3x_4$, $x_1 = -3x_3 - 5x_4$ $\Longrightarrow$ $\underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} x_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} x_4$ sol. generale del sistema

$\Longrightarrow$ v_1, v_2 base di $Ker(\varphi)$.

<u>Da notare</u>: $Ker(\varphi) \subset \mathbb{R}^4$, $Im(\varphi) \subset \mathbb{R}^3$!

$\dim Ker(\varphi) + \dim Im(\varphi) = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$

come il teorema lo dice.

Addesso: vogliamo dimostrare che

dim $\mathrm{Im}(\varphi)$ = rango (A) vale per $\varphi: V_1 \to V_2$ generale, non solo per $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Def. Un'appl. lineare $\varphi: V_1 \to V_2$ è un isomorfismo se $\mathrm{Im}(\varphi) = V_2$ e $\varphi(v_1) = \varphi(v_1') \iff v_1 = v_1'$.

$[\iff \forall w_2 \in V_2 \ \exists!\ v_1 \in V_1 : \varphi(v_1) = v_2.]$ Notazione: $\varphi: V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$.

Oss. φ è un isomorfismo $\iff \mathrm{Im}(\varphi) = V_2$ e $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$.

Dim. $\varphi(v_1) = \varphi(v_1') \iff \varphi(v_1 - v_1') = 0 \iff v_1 - v_1' \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Esempio fondamentale: se dim $V = n \Rightarrow \exists \varphi: V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$.

Sia $e_1, \dots, e_n$ una base di V. Ogni vettore si scrive di maniera unica $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ per $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$.

Sia $\varphi(v) := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Allora $\varphi: V \to \mathbb{R}^n$ è lineare ed è un isomorfismo perchè $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ e $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^n$.

Osservazione: l'isomorfismo φ dipende della scelta della base!

Addesso mostriamo: c'è una corrispondenza

$\{$ Basi di $V \} \iff \{$ isomorfismi $\varphi: V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \}$.

Lemma. Se $\varphi: V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ è un isomorfismo

$v_1, \dots, v_r \in V_2$ lin. dipendenti / lin. indipendenti / base di V_1 $\iff$ $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r)$ lin. dipendenti / lin. indipendenti / base di V_2

Dim. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0 \Rightarrow \lambda_1 \varphi(v_1) + \dots + \lambda_r \varphi(v_r) = 0$.

$\lambda_1 \varphi(v_1) + \dots + \lambda_r \varphi(v_r) = 0 \Rightarrow \varphi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda v_r) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$ perchè $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$.

Quindi $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r)$ (in) dipendenti $\iff$ stessa cosa per $v_1, \dots, v_r$.

E anche $v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r) \iff \varphi(v) \in \mathrm{Span}(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r))$

Addesso sia $\varphi: V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ un isomorfismo,
$e_1, \dots, e_n$ la base standard di $\mathbb{R}^n$. Allora $\exists!\ v_i \in V : \varphi(v_i) = e_i$
$i = 1, \dots, n$.

Lemma $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ base di V. Abbiamo dimostrato la corrispondenza

$$\{\text{basi di } V\} \longleftrightarrow \{\text{isomorfismi } V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n\}$$
$$v_1, \dots, v_n \quad \mapsto \quad \varphi : v \mapsto [\text{coordinate di } v] \qquad \underline{NB}: v_i \mapsto e_i$$

e viceversa con la costruzione sopra.

Oss. 1) Se $\varphi: V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ è un isomorfismo, possiamo definire un isomorfismo $\varphi^{-1}: V_2 \xrightarrow{\sim} V_1$ via
$\varphi^{-1}(v_2) :=$ l'unico $v_1 \in V_1$ tale che $\varphi(v_1) = v_2$.
[φ^{-1} è lineare perchè se $\varphi(v_1) = v_2$, $\varphi(v_1') = v_2'$
$\Rightarrow \varphi(v_1 + v_1') = \varphi(v_1) + \varphi(v_1') = v_2 + v_2'$
$\Rightarrow v_1 + v_1' = \varphi^{-1}(v_2 + v_2') = \varphi^{-1}(v_2) + \varphi^{-1}(v_2')$
e $\varphi(\lambda v_1) = \lambda \varphi(v_1) = \lambda v_2 \Rightarrow \varphi^{-1}(\lambda v_2) = \lambda v_1 = \lambda \varphi^{-1}(v_2)$]
Di più, $\varphi(\varphi^{-1}(v_2)) = \varphi(v_1) = v_2$, $\varphi^{-1}(\varphi(v_1)) = \varphi^{-1}(v_2) = v_1$
$\Rightarrow \varphi \circ \varphi^{-1} = id_{V_2}$, $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_{V_1}$, i.e. φ^{-1} è la mappa <u>inversa</u> di φ.

2) Se $\varphi: V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$, $\psi: V_2 \xrightarrow{\sim} V_3$ sono isomorfismi
$\Rightarrow$ anche $\psi \circ \varphi : V_1 \to V_3$ è un isomorfismo.
[Verifica simile]

Sia addesso $\varphi: V_1 \to V_2$ un'applicazione lineare
$e_1, \dots, e_n$ una base di V_1 $\rightsquigarrow$ $\varphi_1: V_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$
$v_1, \dots, v_m$ una base di V_2 $\rightsquigarrow$ $\varphi_2: V_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$
Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ la matrice di φ rispetto a questi due basi. Per definizione,

$$\begin{bmatrix} \text{colonna N° } i \\ \text{di } A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{coordinate di } \varphi(e_i) \\ \text{rispetto alla base } v_1, \dots, v_m \end{bmatrix} = \varphi_2(\varphi(e_i))$$

Quindi abbiamo un diagramma

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi_1"', "\wr"] & V_2 \arrow[d, "\wr", "\psi_2"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

dove $A: v \mapsto A \cdot v$
e il diagramma è commutativo, i.e. $\psi_2 \circ \varphi = A \circ \psi_1$.

["sulle coordinate di $v_1 \in V_1$ φ agisce via moltiplicazione per A"]

Come ψ_1, ψ_2 sono degli isomorfismi,

$\psi_1(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \mathrm{Ker}(A)$, $\psi_2(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{Im}(A)$

e ψ_1, ψ_2 fanno un' "identificazione" di questi sottospazi.

<u>Cor.</u> $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim \mathrm{Ker}(A)$, $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{rg}(A)$.

Quindi abbiamo ridotto il caso generale al caso $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, e tutto si calcola con A!

<u>Esercizio.</u> Sia $\varphi: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ definita da

$\varphi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_3 + a_2 + a_1)x^3 + a_0x^2 + 2a_1$.

Trovare basi di $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Matrice di φ rispetto alla base standard $1, x, x^2, x^3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[corrisponde all'isomorfismo $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^4$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mapsto \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$]

$\wr$ Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 pivots nelle primi 3 colonne
[la 4^a colonna è uguale alla terza!]
$\Rightarrow$ base di $\mathrm{Im}(\varphi)$ corrisponde alle primi 3 colonne: $\varphi(1) = x^2$, $\varphi(x) = 2 + x^3$, $\varphi(x^2) = x^3$.

Ma $\mathrm{Span}(x^2, 2 + x^3, x^3) = \mathrm{Span}(1, x^2, x^3) \Longrightarrow 1, x^2, x^3$ base "più semplice". [Ma anche $x^2, 2 + x^3, x^3$ è buona!]

$\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 3} - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 4 - 3 = 1$.

Ogni vettore $\neq 0$ è una base, per esempio $x^3 - x^2$.

<u>Da notare</u>: Se $\varphi : V_1 \to V_2$, $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset V_1$, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset V_2$.

In questo esempio $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

e $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$!!

<u>Problema</u>: Siano $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\psi} V_3$ mappe lineari.

Allora anche $\psi \circ \varphi : V_1 \to V_3$ è lineare.

Siano $e_1, \dots, e_n$ base di V_1 notata $\mathcal{B}_1$

$f_1, \dots, f_m$ base di V_2 —"— $\mathcal{B}_2$

$g_1, \dots, g_r$ base di V_3 —"— $\mathcal{B}_3$.

Sia B la matrice di φ rispetto a $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$

A la matrice di ψ rispetto a $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$.

Qual è la matrice di $\psi \circ \varphi$ rispetto a $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3$?

<u>Caso</u> $\boxed{n = m = r = 2}$: Allora $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ è anche la matrice di $\psi \circ \varphi$. Dobbiamo trovare le coordinate di $(\psi \circ \varphi)(e_1)$, $(\psi \circ \varphi)(e_2)$ rispetto a g_1, g_2. Siano

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$ Allora

$$\varphi(e_1) = b_{11} f_1 + b_{21} f_2 \qquad \varphi(e_2) = b_{12} f_1 + b_{22} f_2$$

$$(\psi \circ \varphi)(e_1) = b_{11}\psi(f_1) + b_{21}\psi(f_2) \quad (\psi \circ \varphi)(e_2) = b_{12}\psi(f_1) + b_{22}\psi(f_2).$$

Ma $\psi(f_1) = a_{11} g_1 + a_{21} g_2$, $\psi(f_2) = a_{12} g_1 + a_{22} g_2$.

$$(\psi \circ \varphi)(e_1) = (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}) g_1 + (\cancel{a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}}) g_2$$
$$a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}$$

$$(\psi \circ \varphi)(e_2) = (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}) g_1 + (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}) g_2.$$

Quindi la matrice è:

$$\begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{bmatrix}.$$

La situazione generale è simile:

Def. Siano $A \in M_{r \times m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Loro prodotto $(A \cdot B) \in M_{r \times m}(\mathbb{R})$ è definito da:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rm} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = [c_{ij}]_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le m}} \qquad c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{im} b_{mj}$$

["= riga N° i × colonna N° j"]

Casi particolari: 1) $n = 1$ B = vettore colonna v

$A \cdot B = A \cdot v$ definito prima

2) $n = m = r = 2$ definito sopra.

Teorema. Siano $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\psi} V_3$ come sopra

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ basi di V_1, V_2, V_3

B = matrice di φ [in $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$], A = matrice di ψ $[\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3]$

Allora la matrice di $\psi \circ \varphi$ rispetto a $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3$ è $A \cdot B$.

Dim. Stesso tipo di calcolo come nel caso $n = m = r = 2$.

Esempio. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\varphi(e_1) = e_2$

$\varphi(e_2) = e_3$

[e_1, e_2, e_3: base standard] $\varphi(e_3) = 0$.

Allora per un vettore generale $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Matrice di φ rispetto a e_1, e_2, e_3:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di $\varphi \circ \varphi$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E di $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infatti, $\varphi \circ \varphi \circ \varphi = 0$!

Proprietà della moltiplicazione

1) $A(BC) = (AB)C$

Si può calcolare, ma anche: $A \leftrightarrow \psi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$
$B \leftrightarrow \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$C \leftrightarrow g: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$

e $(\psi \circ \varphi) \circ g = \psi \circ (\varphi \circ g)$.

2) $AB = BA$ non è vero in generale! Esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Sia $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ la matrice identità di $M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Allora $\forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\quad I \cdot A = A \cdot I = A$

Si può calcolare, ma anche $I \leftrightarrow id_{\mathbb{R}^n}$ $\quad A \leftrightarrow \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

e $\varphi \circ id = id \circ \varphi = \varphi$.

4) Se $\varphi: V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ isomorfismo, abbiamo visto: $\exists\, \varphi^{-1}: V_2 \xrightarrow{\sim} V_1$ tale che $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{V_2}$, $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_{V_1}$. Se fissiamo basi $\mathcal{B}_1$ di V_1, $\mathcal{B}_2$ di V_2, φ ha matrice A
φ^{-1} — " — A^{-1}

$\Rightarrow$ $A \cdot A^{-1} = I$, $A^{-1} A = I$. $\quad [I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, dove $n = \dim V_1 = \dim V_2]$

Matrice inversa. Non esiste sempre, solo se $A \leftrightarrow \varphi$ isomorfismo.

Esempio. Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \dfrac{1}{ad-bc}$

Infatti,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

In generale, vedremo una formula per A^{-1}.

$\exists$ anche algoritmo per calcolare A^{-1}.

Problema: Sia $\dim V = n$, $\varphi: V \to V$ lineare.
Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di V.
Notazione: $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} :=$ matrice di φ rispetto a $\mathcal{B}$ [partenza] e $\mathcal{B}'$ [arrivo]. Se $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ $[\varphi]_{\mathcal{B}} := [\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Conoscendo $[\varphi]_{\mathcal{B}}$, come calcolare $[\varphi]_{\mathcal{B}'}$?

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi = id$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ base standard $\quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

$$[id]_{\mathcal{B}} = [id]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (prima colonna: imm. di $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\mathcal{B}$]
seconda: imm. di $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Calcoliamo $[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$:

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Da notare:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [id]_{\mathcal{B}'} = [id \circ id]_{\mathcal{B}'} \overset{\text{Teorema}}{=} [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{È giusto!}$$

Quindi $[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \left([id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^{-1}$. $\quad (*)$

Si nota anche: $[id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = [\varphi]_{\mathcal{B}}$, dove

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

i.e. φ invia $\mathcal{B}$ su $\mathcal{B}'$. In modo simile,

$[id]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = [\psi]_{\mathcal{B}'}$ dove ψ invia $\mathcal{B}'$ su $\mathcal{B}$.

$\varphi, \psi : V \to V$ sono isomorfismi, e $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = id$

$\Rightarrow \varphi = \psi^{-1}$. Paragonare con $(*)$!

In generale: Se $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V,

$[id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = [\varphi]_{\mathcal{B}}$, dove φ invia $\mathcal{B}$ su $\mathcal{B}'$

$[id]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = [\varphi^{-1}]_{\mathcal{B}'}$, dove φ^{-1} —〃— $\mathcal{B}'$ su $\mathcal{B}$.

Inoltre, $[id]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \cdot [id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema}}}{=} [id \circ id]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = [id]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow [id]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \left([id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}\right)^{-1}$.

Teorema. Come sopra, siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi di V

$\varphi : V \to V$ lineare.

Se $A = [\varphi]_{\mathcal{B}}$, allora

$[\varphi]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} A P$, dove $P = [id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$.

P si chiama: matrice di cambiamento di basi.

Dim. $[\varphi]_{\mathcal{B}'} = [id \circ \varphi \circ id]_{\mathcal{B}'} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema}}}{=} [id]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \cdot [\varphi]_{\mathcal{B}} \cdot [id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$

$= P^{-1} A P$.

Esempio. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ = base standard

$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\varphi : v \mapsto A \cdot v$.

$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$[\varphi]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Metodo anziano:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2&-2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+0\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2&-2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=0\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+0\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

In questo caso più semplice, ma non necessariamente in generale!

Generalizzazione: $\varphi: V_1 \to V_2$ $\qquad$ $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1'$ basi di V_1

$\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2'$ —‖— V_2

Se $A = [\varphi]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}$, $[\varphi]^{\mathcal{B}_2'}_{\mathcal{B}_1'} = Q^{-1}AP$, dove

$P = [id]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1'}$, $Q = [id]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_2'}$ sono le matrici di cambiamento di basi.

Infatti, $[\varphi]^{\mathcal{B}_2'}_{\mathcal{B}_1'} = [id_{V_2}\circ\varphi\circ id_{V_1}]^{\mathcal{B}_2'}_{\mathcal{B}_1'} = [id_{V_2}]^{\mathcal{B}_2'}_{\mathcal{B}_2}[\varphi]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}[id_{V_1}]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1'}$.

Da notare: se $\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,

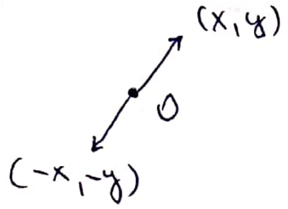
$P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $Q \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$.

Esempi geometrici in $\mathbb{R}^2$.

1) ~~Rotazione~~ Riflessione rispetto all'origine: $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$

Matrice rispetto ad ogni base:

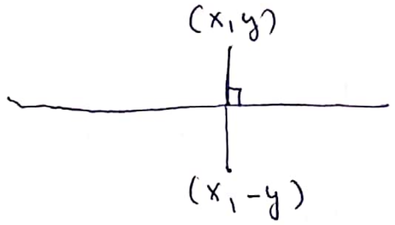
$$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$



2) Riflessione rispetto all'asse $y=0$: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

Matrice rispetto alla base standard:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Riflessione rispetto all'asse $x=0$: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$

Matrice: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

La composizione di questi due è la riflessione rispetto a 0.

Infatti,
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

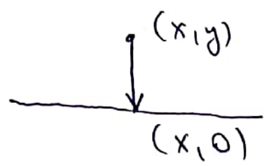
Osserviamo:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti, tutti questi riflessioni soddisfanno $g \circ g = id$.

3) Proiezione all'asse $y=0$.

Matrice risp. alla base standard: $\pi: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Osserviamo: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e infatti $\pi \circ \pi = \pi$.

π __non__ è un isomorfismo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ perché

$$\mathrm{Ker}(\pi) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} \neq 0.$$

Anche $\mathrm{Im}(\varphi) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \neq \mathbb{R}^2$.

Generalizzazioni in $\mathbb{R}^n$:

1ª) : $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$ riflessione rispetto a 0

2ª) : $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -x_n \end{bmatrix}$ riflessione rispetto all'iperpiano $x_n = 0$
[ci sono riflessioni simili con $x_i = 0$]

3ª) : $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$ proiezione all'iperpiano $x_n = 0$.
[$\exists$ proiezioni simili a $x_i = 0$ $i = 1, .., n-1$
Composizioni: proiezione a un piano,
e.g. $x_{n-1} = x_1 = 0$ $\Updownarrow$ sottospazio]

Esercizio: Come trovare la matrice della proiezione ~~riflessione rispetto~~ all'asse $\{x=y\} \subset \mathbb{R}^2$?

Metodo 1: L'asse $\{x=y\}$ è il sottospazio generato da $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
Completiamolo in una base con $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

ogni vettore $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ si scrive unicamente come

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{x+y}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{y-x}{2}\right)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La proiezione è data da $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \left(\frac{x+y}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
quindi la sua matrice
rispetto alla base standard è $\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Metodo 2. Rispetto alla base $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

la matrice della proiezione è $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Quindi rispetto alla base standard
sarà $P^{-1}AP$, dove P è la matrice
di cambiamento di basi

Qui $P = [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ dove $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

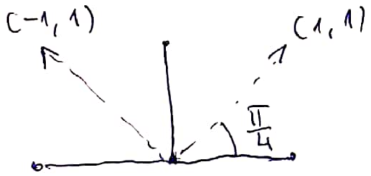
$= \left([id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \right)^{-1}$ $\quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

quindi la matrice è

$$P^{-1} A P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & +1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Osservazione:



$(1, 1)$ s'ottiene da $(\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}(1, 0)$

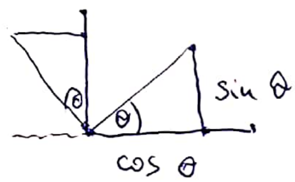
$(-1, 1)$ —"— $(0, \sqrt{2}) = \sqrt{2}(0, 1)$

con una rotazione di angolo $\frac{\pi}{4}$

In generale, se ρ_θ è la rotazione di angolo θ [direzione ↺] $\Rightarrow$

$$\rho_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\rho_\theta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$



quindi la matrice di ρ_θ è (nella base standard) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \left(=: P_\theta^{-1}\right)$

La mappa inversa di ρ_θ è $\rho_{-\theta}$, è la sua matrice è $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \left(=: P_\theta\right)$

e infatti loro prodotto è $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Nell'esempio sopra P fa una rotazione di angolo $-\frac{\pi}{4}$ e moltiplica per $\frac{1}{\sqrt{2}}$, P^{-1} —"— $\frac{\pi}{4}$

—"— $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Il metodo si generalizza per ottenere la matrice di una qualsiasi proiezione a una retta.