Informatica. CPS corsi A e B
Prova scritta del 12/02/20

Esercizio 1 (punti 11)

Si lanciano due dadi equilibrati, con le facce numerate da 1 a 6, e consideriamo gli eventi A_k *" il primo numero uscito è k"* (con $1 \leq k \leq 6$) e E_j *"la somma dei due numeri è j"* (con $2 \leq j \leq 12$).

a) Provare che, qualunque sia k, gli eventi E_7 e A_k sono indipendenti.

b) Per quali altri valori di j e di k gli eventi E_j e A_k risultano indipendenti?

Esercizio 2 (punti 11)

L'Università di Perugia ha 576 studenti che frequentano regolarmente la mensa, questa mensa ha 300 posti e due turni di pranzo, alle 13 e alle 13.45. Ogni studente, casualmente e indipendentemente dagli altri, si presenta al primo o al secondo turno.

a) Indichiamo con X la variabile aleatoria che indica il numero di studenti che si presentano al primo turno: quali sono la speranza e la varianza di X ?

b) Qual è (approssimativamente) la probabilità di poter far accomodare tutti gli studenti che si presentano al primo turno? E tutti gli studenti che si presentano ad entrambi i turni?

c) Qual è (approssimativamente) il minimo numero di posti che dovrebbe avere la mensa affinché la probabilità di poter accomodare gli studenti che si presentano al primo turno sia almeno 0.95 ?

Esercizio 3 (punti 11)

Consideriamo la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ a & 0 < x < 1 \\ \dfrac{b}{x^2} & x > 1 \end{cases}$$

a) Dire per quali valori delle costanti a e b la funzione sopra scritta è una densità di probabilità.

b) Consideriamo una variabile X avente la densità sopra scritta: quali momenti possiede (in funzione di a e di b)?

c) Sia ora $Y = \dfrac{1}{X}$: qual è la densità di Y? Esistono delle costanti a e b per le quali X e $\dfrac{1}{X}$ hanno la stessa densità?

Una soluzione:

Esercizio 1

a) Introduciamo l'evento B_h *" il secondo numero uscito è h"* (con $1 \le h \le 6$) e notiamo che $E_7 \cap A_k = A_k \cap B_{7-k}$. Si ha dunque

$$\mathbf{P}(E_7) = \sum_{k=1}^{6} \mathbf{P}\big(A_k \cap B_{7-k}\big) = 6 \times \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6}$$

Viceversa, qualunque sia $1 \le k \le 6$,

$$\mathbf{P}\big(E_7 \cap A_k\big) = \mathbf{P}\big(A_k \cap B_{7-k}\big) = \frac{1}{36} = \mathbf{P}(E_7).\mathbf{P}(A_k)$$

e questa è proprio l'indipendenza degli eventi E_7 e A_k .

b) Questa proprietà vale solo con E_7 . Infatti dato l'evento E_j con $j \neq 7$, il primo dato estratto non può prendere tutti i valori possibili. Ad esempio dato l'evento E_6 (cioè se la somma dei due numeri è 6), il primo dado non può prendere il valore 6 e dunque gli eventi E_6 e A_6 sono incompatibili (hanno cioè intersezione vuota) e pertanto non possono essere indipendenti.

Questo dimostra che (se $j \neq 7$), E_j non può essere indipendente *da ogni* A_k , tuttavia potrebbe risultare indipendente da qualche particolare A_k . Ma neanche questo può succedere: infatti l'eguaglianza sopra scritta è basata sul fatto che $\mathbf{P}(E_7) = 1/6$ mentre ogni altro E_j ha probabilità minore di $1/6$. Ad esempio

$$\mathbf{P}(E_6) = \sum_{k=1}^{5} \mathbf{P}\big(A_k \cap B_{6-k}\big) = \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$$

Esercizio 2

a) La variabile X è *Binomiale* di parametri 576 e 0.5 e pertanto $\mathbf{E}[X] = 576 \times 0.5 = 288$ e $Var(X) = 576 \times 0.5 \times (1 - 0.5) = 144$.

Ma possiamo subito dire qualcosa di più: la variabile X può essere vista come $X_1 + \cdots + X_{576}$, dove le X_i sono indipendenti e di *Bernoulli* di parametro $0.5 = 1/2$ e pertanto, per il Teorema Limite Centrale, la variabile

$$\frac{X - 576 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{576 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = \frac{X - 288}{12}$$

è approssimativamente Gaussiana standard. Questo verrà utilizzato nei calcoli successivi.

b) È possibile accomodare tutti gli studenti che si presentano al primo turno se X non supera 300 (la capacità dei posti) e pertanto si tratta di calcolare

$$\mathbf{P}\big\{X \leq 300\big\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{X-288}{12} \leq \frac{300-288}{12}\Big\} \approx \Phi(1)$$

dove $\Phi(.)$ è la *funzione di ripartizione* della variabile N(0,1). Dalle tavole si ricava $\Phi(1) \approx 0.841$ e quindi questa è la probabilità di poter accomodare il primo turno.

Se X si presentano al primo turno, $576-X$ si presentano al secondo turno e dire $576 - X \leq 300$ equivale a $X \geq 276$. Si tratta allora di calcolare la probabilità

$$\mathbf{P}\big\{276 \leq X \leq 300\big\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{276-288}{12} \leq \frac{X-288}{12} \leq \frac{300-288}{12}\Big\} =$$

$$= \mathbf{P}\Big\{-1 \leq \frac{X-288}{12} \leq 1\Big\} \approx \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\,\Phi(1) - 1 \approx 0.682$$

c) Riprendendo il conto del punto precedente, se n sono i posti della mensa, si riesce ad accomodare il primo turno se $X \leq n$: occorre quindi che la probabilità

$$\mathbf{P}\big\{X \leq n\big\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{X-288}{12} \leq \frac{n-288}{12}\Big\} \approx \Phi\big(\frac{n-288}{12}\big) \geq 0.95$$

Osservando la tavola N(0,1), si trova che questo succede se $\frac{n-288}{12} \geq 1.65$ cioè $n \geq 308$.

Esercizio 3

a) Calcoliamo l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 a\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{b}{x^2}\,\mathrm{d}x = a+b$. Si deve dunque avere $a+b=1$ ma anche (poiché la densità deve essere a valori positivi) $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

b) Cominciamo col momento primo: questo esiste se $a\int_0^1 x\,\mathrm{d}x + b\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ è finito. Ora il secondo integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$ e di conseguenza se $b \neq 0$ la variabile non possiede alcun momento. Viceversa, se $b=0$ e quindi $a=1$, si constata immediatamente che la variabile possiede tutti i momenti.

c) Il calcolo è abbastanza agevole perché la funzione $x \to y = x^{-1}$ è *biunivoca (derivabile, con inversa derivabile)* da $]0, +\infty[$ in sé, e di conseguenza, detta g la densità di Y, si ha (per $y > 0$),

$$g(y) = f\big(x(y)\big)\Big|\frac{\mathrm{d}\,x(y)}{\mathrm{d}\,y}\Big| = f(y^{-1})\frac{1}{y^2}$$

Più precisamente

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y < 0 \\ \frac{b\,y^2}{y^2} = b & \text{per } 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{a}{y^2} & \text{per } y > 1 \end{cases}$$

Di conseguenza le due densità f e g sono eguali se si ha $a = b$ (e quindi $a = b = \frac{1}{2}$).