Informatica. CPS corsi A e B
Prova scritta del 20/01/20

Esercizio 1 (punti 10)

Un commerciante vuole vendere a un certo acquirente 8 schede elettroniche, e sa che 2 di esse sono difettose: le può imballare in due modi diversi, mettendole tutte in una scatola oppure suddividendole in due scatole più piccole (che ne contengono 4 ciascuna). Sa che l'acquirente, prima di acquistarle, ne vuole sottoporre 2 a verifica, e sa che se vengono imballate in due scatole diverse ne sceglierà una per ogni scatola.

Il commerciante ha tre possibili strategie:
a) sistemare tutte le schede in una scatola;
b) inserire in ognuna delle due scatole più piccole una scheda difettosa;
c) sistemare entrambe le schede difettose in una sola delle due scatole più piccole.

Per ciascuna di queste strategie, qual è la probabilità che l'acquirente durante la sua verifica non trovi alcuna scheda difettosa?

Esercizio 2 (punti 10)

Un cane fa il giro fra le case di Andrea, Barbara e Carlo: partendo da Barbara non visita mai gli altri e torna direttamente a quella casa, mentre partendo da Andrea o Carlo visita con uguale probabilità una delle altre due case ma non torna subito.

a) Determinare il grafo della catena di Markov che modellizza la situazione e scrivere la matrice di transizione.

b) Partendo da Andrea, qual è la probabilità che il cane si trova in casa di Barbara dopo m giri?

c) Arrivando in casa di Barbara, il cane riceve due ossi, ma arrivando in casa di Andrea o Carlo ne riceve solo uno: calcolare (in funzione della casa di partenza) qual è il numero totale atteso degli ossi ricevuti dopo tre giri.

d) Inizialmenta il cane si trova in casa di Andrea con probabilità p_A, in casa di Barbara con probabilità p_B e in casa di Carlo con probabilità p_C: esiste una distribuzione (p_A, p_B, p_C) che rende la catena stazionaria?

Esercizio 3 (punti 10)

Sia data una variabile aleatoria X avente densità $f(x) = c\,\mathrm{e}^{-|x|}$, dove c è una opportuna costante positiva.

a) Calcolare la costante c in modo tale che la funzione sopra scritta sia effettivamente una densità.

b) Esaminare se esiste ed eventualmente calcolare il momento secondo $\mathbf{E}\big[X^2\big]$.

c) Calcolare la densità della variabile $Y = \mathrm{e}^X$.

Una soluzione:

Esercizio 1

a) In questo caso, la probabilità di non trovare alcuna scheda difettosa è

$\frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{6\times 5}{8\times 7} = \frac{15}{28} = 0{,}535$

b) Nel secondo caso la probabilità cercata è il prodotto delle probabilità di non trovare una scheda difettosa nella prima e poi nella seconda scatola, cioè $3/4 \times 3/4 = 9/(16) = 0{,}562$.

c) Nel terzo caso infine la probabilità cercata è semplicemente la probabilità di non trovare una scheda difettosa nella prima scatola (intendendo con questo quella in cui sono state inserite le due schede difettose): è immediato constatare che questa probabilità è $1/2 = 0{,}5$.

Di conseguenza la strategia che offre maggiore probabilità di *farla franca* è la seconda, cioè quella che consiste nell'imballare le schede in due scatole e inserire una scheda difettosa in ognuna delle due scatole.

Esercizio 2

a) Scriviamo direttamente la matrice di transizione:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Il cane può andare direttamente da A a B e lì rimanere (e questo avviene con probabilità $\frac{1}{2} \times 1 \times \cdots = 1/2$, oppure arrivarci dopo due passaggi (prima da A a C poi da C a B) con probabilità $(\frac{1}{2})^2$ oppure in tre passaggi ... in definitiva la probabilità cercata è $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \cdots + (\frac{1}{2})^m = 1 - (\frac{1}{2})^m$.

c) Se il cane parte da B, al termine di ogni giro si ritrova in B e riceve in tutto 6 ossi.
Se parte da A o da C, la situazione è perfettamente simmetrica: immaginiamo allora di partire da A.

Il cane può con probabilità $\frac{1}{2}$ andare da A in B e lì rimanere, e in tal caso riceve 6 ossi, oppure andare in B dopo 2 giri (questo avviene con probabilità $(\frac{1}{2})^2$ e riceve 5 ossi), oppure arrivare da B al termine dei tre giri (col percorso $A \to C \to A \to B$ che ha probabilità $(\frac{1}{2})^3$ e in tal caso riceve 4 ossi) oppure restare sempre tra A e C (questo avviene di nuovo con probabilità $(\frac{1}{2})^3$ e di ossi ne riceve 3).

Il definitiva il numero totale atteso di ossi è

$$3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{8} + 5 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{2} = \frac{3+4+10+24}{8} = 5.125$$

d) Non riporto esplicitamente i conti, che sono molto facili: si trova subito che l'unica distribuzione di probabilità invariante è data da $\mu = (0,1,0)$, cioè il cane si trova all'inizio in casa di Barbara ... e lì rimane fisso.

Esercizio 3

a) Calcoliamo $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2$, e di conseguenza la costante c è $1/2$.

b) Per verificare se esiste il momento secondo, occorre esaminare se è finito l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\, x^2\, \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

Si può calcolare quest'ultimo integrando per parti due volte oppure più semplicemente osservare che è eguale a $\Gamma(3) = 2$: ne segue che il momento secondo esiste ed è eguale a 2.

c) L'applicazione $x \to \mathrm{e}^x = y$ è biunivoca dall'intervallo $]-\infty, +\infty[$ sull'intervallo $]0, +\infty[$, e la sua inversa $x = \log(y)$ è derivabile: di conseguenza, detta g la densità della variabile Y , questa è nulla per $y \leq 0$, e per $y > 0$ è eguale a

$$f\big(\log(y)\big)\left|\frac{\mathrm{d}\,\log(y)}{\mathrm{d}\,y}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-|\log(y)|}}{2\,y}$$

Notiamo che, se $0 < y < 1$, $\log(y)$ è negativo, e di conseguenza $\mathrm{e}^{-|\log(y)|} = \mathrm{e}^{\log(y)} = y$; invece, se $y \geq 1$, $\log(y)$ è positivo e quindi $\mathrm{e}^{-|\log(y)|} = \mathrm{e}^{-\log(y)} = \frac{1}{y}$.

Concludendo, la densità g della variabile Y è data da

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{per}\, y \leq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{per}\, 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2y^2} & \text{per}\, y \geq 1 \end{cases}$$