

Terzo compitino per il corso di Analisi Matematica 2 con soluzioni
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
19/05/2025

Esercizio 1 (12 punti). *Si definisca l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$*

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Si calcoli il perimetro di A .

La frontiera di A è della forma $\partial A = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, con

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{|x| \leq z \leq \sqrt{2 - x^2}, y = 0\}, \\ S_2 &:= \{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, z = \sqrt{x^2 + y^2}\}, \\ S_3 &:= \{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}. \end{aligned}$$

I tre insiemi si intersecano in insiemi trascurabili. Il perimetro di A è la somma delle aree delle regioni S_1, S_2, S_3 .

L'insieme S_1 è la regione di piano $\{y = 0\}$ compresa tra il grafico di $z = |x|$ e il grafico di $z = \sqrt{2 - x^2}$, per $x \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$. Osserviamo che tale regione è un settore circolare, quindi si rappresenta bene in coordinate polari come $\rho \in [0, \sqrt{2}]$ e $\theta \in [\pi/4, 3\pi/4]$. Quindi

$$\text{Area}(S_1) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \rho \, d\theta \, d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

L'insieme S_2 è la porzione di cono $\{z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ con $z \in [0, 1]$ e $y \geq 0$. Una parametrizzazione è $\Phi : [0, 1] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\Phi(z, \theta) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z).$$

Poiché

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z, \theta) \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(z, \theta) \right\| = |z| \sqrt{2},$$

otteniamo

$$\text{Area}(S_2) = \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z, \theta) \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(z, \theta) \right\| \, dz \, d\theta = \sqrt{2} \int_0^\pi \int_0^1 z \, dz \, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

L'insieme S_3 è invece parte della superficie sferica di raggio $\sqrt{2}$. Una possibile parametrizzazione è data dalle coordinate sferiche, con raggio fissato pari a $\sqrt{2}$:

$$\Psi(\varphi, \theta) = \left(\sqrt{2} \sin \varphi \cos \theta, \sqrt{2} \sin \varphi \sin \theta, \sqrt{2} \cos \varphi \right),$$

con $\varphi \in [0, \pi/4]$, $\theta \in [0, \pi]$. In questo caso

$$\left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \times \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \right\| = 2 \sin \varphi,$$

da cui

$$\text{Area}(S_3) = \int_{[0, \pi/4] \times [0, \pi]} \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \times \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \right\| d\varphi d\theta = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi} 2 \sin \varphi d\theta d\varphi = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Concludiamo quindi che il perimetro di A è

$$P(A) = \frac{5 - \sqrt{2}}{2} \pi.$$

Esercizio 2 (12 punti). *Definito per ogni $N \in \mathbb{N}$ il cubo unitario $Q_N = [0, 1]^N$ in $\mathbb{R}^N$, si definiscano $\Phi : Q_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\Psi : Q_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ come*

$$\Phi(x, y) = (x^2 y, y, xy^2), \quad \Psi(x, y, z) = (x + y, y + z, xz).$$

Si consideri la 2-catena in $\mathbb{R}^3$ data da $\mathcal{C} = \Phi - \partial\Psi$. Sia poi ω la 2-forma su $\mathbb{R}^3$ data da

$$\omega = ada \wedge db + bda \wedge dc,$$

usando (a, b, c) come coordinate in $\mathbb{R}^3$. Si calcoli $\int_{\mathcal{C}} \omega$.

Visto che $\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\Phi} \omega - \int_{\partial\Psi} \omega$, consideriamo separatamente i due integrali. Sappiamo che $\int_{\Phi} \omega = \int_{Q_2} \Phi_{\#} \omega$, ed inoltre

$$\Phi_{\#} \omega = x^2 y d\Phi_a \wedge d\Phi_b + y d\Phi_a \wedge d\Phi_c.$$

Notiamo poi che

$$d\Phi_a = 2xy dx + x^2 dy, \quad d\Phi_b = dy, \quad d\Phi_c = y^2 dx + 2xy dy.$$

Di conseguenza,

$$d\Phi_a \wedge d\Phi_b = 2xy dx \wedge dy, \quad d\Phi_a \wedge d\Phi_c = 3x^2 y^2 dx \wedge dy.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \int_{\Phi} \omega &= \int_{Q_2} x^2 y d\Phi_a \wedge d\Phi_b + y d\Phi_a \wedge d\Phi_c = \int_{Q_2} (2x^3 y^2 + 3x^2 y^3) dx \wedge dy \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 2x^3 y^2 + 3x^2 y^3 dy dx = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda invece $\int_{\partial\Psi} \omega$, la cosa più rapida da fare è notare che $d\omega = -da \wedge db \wedge dc$, e quindi

$$-\int_{\partial\Psi} \omega = -\int_{\Psi} d\omega = -\int_{Q_3} \Psi_{\#}(d\omega).$$

Inoltre,

$$-\Psi_{\#}(d\omega) = d\Psi_a \wedge d\Psi_b \wedge d\Psi_c = (dx + dy) \wedge (dy + dz) \wedge (zdx + xdz) = (x + z)dx \wedge dy \wedge dz.$$

Di conseguenza,

$$-\int_{\partial\Psi} \omega = \int_{[0,1]^3} x + z dx dy dz = 1.$$

Abbiamo quindi finalmente che

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \frac{17}{12}.$$

Esercizio 3 (12 punti). Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \notin \mathbb{Z} \times \{0\}\}$, e sia ω la 1-forma su Ω data da

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dy + \frac{1}{\sin^2(\pi x) + y^2} d(\sin^2(\pi x) + y^2).$$

Sia poi $n \in \mathbb{N}$, e sia $\gamma : [0, \pi/2] \rightarrow \Omega$ la curva definita come

$$\gamma(t) = \left(n + \frac{1}{2}\right) (\cos t, \sin t).$$

Si calcoli $\int_{\gamma} \omega$.

Scriviamo $\omega = \omega_1 + \omega_2$ con

$$\omega_1 = \frac{x}{x^2 + y^2} dy, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sin^2(\pi x) + y^2} d(\sin^2(\pi x) + y^2),$$

e calcoliamo separatamente $\int_{\gamma} \omega_1$ e $\int_{\gamma} \omega_2$. Per quanto riguarda ω_1 , per definizione si ha

$$\int_{\gamma} \omega_1 = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\cos t}{n + \frac{1}{2}} \cdot \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin t \right)' dt = \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}.$$

Per quanto riguarda ω_2 , invece, invece di fare lunghi conti risulta molto più comodo definire $f(x, y) = \sin^2(\pi x) + y^2$, in modo che

$$\omega_2 = \frac{1}{f} df = d(\ln f).$$

Allora, per il Teorema di Stokes si ha

$$\int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\gamma} d(\ln f) = \int_{\partial\gamma} \ln f.$$

Tuttavia, $\partial\gamma$ è la 0-catena data dal punto $\gamma(\pi/2)$ (moltiplicato per 1) e dal punto $\gamma(0)$ (moltiplicato per -1). Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega_2 &= \int_{\gamma(\pi/2) - \gamma(0)} \ln f = \ln f(\gamma(\pi/2)) - \ln f(\gamma(0)) = \ln f\left(0, n + \frac{1}{2}\right) - \ln f\left(n + \frac{1}{2}, 0\right) \\ &= \ln \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right) - \ln(1) = 2 \ln \left(n + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Si conclude che

$$\int_{\gamma} \omega = \frac{\pi}{4} + 2 \ln \left(n + \frac{1}{2}\right).$$