

Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
4/2/2025

Esercizio 1 (8 punti). *Si consideri il problema*

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) - \sin(t) & \text{per } t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

- (i) *Si discutano, al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$, esistenza e unicità di soluzioni massimali $u \in C^1([0, T])$.*
- (ii) *Si discuta l'esistenza di soluzioni globali.*
- (iii) *Si dimostri che esistono soluzioni che esplodono a $+\infty$, soluzioni che esplodono a $-\infty$ e soluzioni limitate.*
- (iv) *Si dica quante sono le soluzioni limitate.*

Scrivendo il problema come $u'(t) = F(t, u(t))$, dove $F(t, y) = y - \sin(t)$, visto che la funzione F è Lipschitziana in tutto $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ sappiamo che per ogni $u_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione massimale, che è anche globale. (*E' possibile scrivere la soluzione esplicita, ma evitiamo di farlo qui perché poco interessante e istruttivo*).

Si consideri ora una qualunque soluzione u , e si supponga che per un qualche $\bar{t} \geq 0$ si abbia $u(\bar{t}) > 1$. Si ha quindi $u'(\bar{t}) = u(\bar{t}) - \sin(\bar{t}) \geq u(\bar{t}) - 1 > 0$, e dunque la funzione u è strettamente crescente in un intorno destro di $\bar{t}$. In realtà, si può osservare che u sia strettamente crescente in tutto l'intervallo $[\bar{t}, +\infty)$: se non fosse così, infatti, poniamo $\hat{t}$ il minimo istante successivo a $\bar{t}$ per il quale $u'(\hat{t}) = 0$: visto che per minimalità la u è strettamente crescente in $[\bar{t}, \hat{t})$, sarebbe $u(\hat{t}) > u(\bar{t}) > 1$, e quindi si avrebbe un assurdo perché come prima avremmo $u'(\hat{t}) > 0$, contro al fatto che $u'(\hat{t}) = 0$. La funzione u è quindi strettamente crescente su tutto $[\bar{t}, +\infty)$, ed ammette quindi un limite $L > 1$, finito o infinito. E' impossibile che L sia finito, perché altrimenti avremmo definitivamente $u' > (L - 1)/2$, e questa disuguaglianza è incompatibile con la presenza di un asintoto orizzontale. Ricapitolando, una qualunque soluzione che in un qualche istante vale più di 1 sicuramente esplode a $+\infty$; esistono ovviamente tali soluzioni, ad esempio tutte quelle con $u_0 > 1$.

In maniera del tutto analoga, se per una qualche soluzione u ed un qualche $\bar{t} \geq 0$ si ha $u(\bar{t}) < -1$, la soluzione deve esplodere a $-\infty$, e quindi ad esempio esplodono a $-\infty$ tutte le soluzioni corrispondenti a $u_0 < -1$.

Per unicità della soluzione, se la soluzione corrispondente ad $u_0 = c$ esplode a $+\infty$ per un qualche numero c , lo stesso vale per le soluzioni corrispondenti a qualsiasi $u_0 > c$, ed analogamente se la u esplode a $-\infty$ con $u_0 = c$ allora lo stesso vale per ogni scelta di $u_0 < c$. Siano dunque

$$\alpha = \min \left\{ u_0 : \text{la soluzione esplode a } +\infty \right\}, \quad \beta = \max \left\{ u_0 : \text{la soluzione esplode a } -\infty \right\}.$$

Per quanto detto sopra, sappiamo che u esplode a $+\infty$ per ogni $u_0 > \alpha$, ed esplode a $-\infty$ per ogni $u_0 < \beta$; in particolare, ovviamente $\alpha \geq \beta$. Notiamo adesso che la soluzione u^α corrispondente ad $u_0 = \alpha$ non può esplodere a $+\infty$: se infatti fosse così, allora esisterebbe un qualche $\bar{t} > 0$ tale che $u^\alpha(\bar{t}) \geq 2$. Per dipendenza continua dai dati iniziali, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che qualunque soluzione corrispondente ad $u_0 \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ verifica $u(\bar{t}) > 3/2$. Avremmo quindi che tutte le soluzioni corrispondenti ad $u_0 \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ esplodono a $+\infty$, e questo è assurdo per definizione di α . Perciò, abbiamo scoperto che la soluzione u^α non può esplodere a $+\infty$, e lo stesso ragionamento assicura anche che la soluzione u^β corrispondente ad $u_0 = \beta$ non può esplodere a $-\infty$. Visto che per unicità sappiamo che $u^\alpha \geq u^\beta$, allora in effetti u^α non può nemmeno esplodere a $-\infty$, né u^β può esplodere a $+\infty$. Ossia, tutte le soluzioni corrispondenti ad $u_0 \in [\alpha, \beta]$ non esplodono né a $+\infty$ né a $-\infty$, e per quanto già visto sono quindi limitate tra -1 ed 1 .

Per concludere, possiamo dimostrare che $\alpha = \beta$, e quindi che vi sia esattamente un'unica soluzione limitata. Per fare questo basta considerare due soluzioni diverse u e v , corrispondenti a dati iniziali differenti. Detto $\omega = u - v$, si ha allora $\omega'(t) = u'(t) - v'(t) = u(t) - v(t) = \omega(t)$. Abbiamo quindi che $\omega(t) = e^t \omega(0)$, e quindi ω è una funzione illimitata perché $\omega(0) \neq 0$. Non possono quindi esistere due soluzioni limitate diverse, e questo conclude quanto volevamo dimostrare.

Esercizio 2 (8 punti). *Si considerino le 2-forme ω su $\mathbb{R}^3$ che verificano le seguenti proprietà:*

- ω è chiusa;
- $\omega \wedge dx_1 = 0$;
- la scrittura di ω nella base standard corrisponde a funzioni che dipendono solo dalle variabili x_1 e x_2 (ossia scrivendo come al solito $\omega = \sum_I f_I dx_I$ dove I sono i multiindici di lunghezza 2, tutte le funzioni f_I dipendono solo da x_1 e x_2).

Si esibisca un esempio di una tale forma ω (diversa dalla forma nulla), e si dica come devono essere fatte le forme del tipo richiesto (si trovi cioè una formula chiusa che identifica tutte e sole le forme con le proprietà descritte).

Una generica 2-forma su $\mathbb{R}^3$ si può sempre scrivere come

$$\omega(x, y, z) = f(x, y, z)dx \wedge dy + g(x, y, z)dx \wedge dz + h(x, y, z)dy \wedge dz,$$

dove per comodità di scrittura usiamo, come al solito, le lettere x , y e z per le variabili invece di x_1 , x_2 e x_3 . La terza richiesta equivale a dire che le funzioni f , g ed h dipendano solo da x ed y e non da z ; la seconda, invece, assicura che $h \equiv 0$, visto che

$$\omega \wedge dx = h dx \wedge dy \wedge dz.$$

Le 2-forme che rispettano la seconda e la terza condizione sono quindi tutte e sole quelle del tipo

$$\omega(x, y, z) = f(x, y)dx \wedge dy + g(x, y)dx \wedge dz.$$

Una tale forma rispetta la prima condizione, ossia è chiusa, se e solo se è nullo il termine

$$d\omega = \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dz = -\frac{\partial g}{\partial y} dx \wedge dy \wedge dz.$$

Questo è vero se e solo se la funzione g non dipende da y . Le forme cercate sono quindi tutte e sole quelle del tipo

$$\omega(x, y, z) = f(x, y)dx \wedge dy + g(x)dx \wedge dz.$$

Esercizio 3 (8 punti). *Si consideri la funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x, y, z) = 3xy - z,$$

dove

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq \frac{z}{1+z^2} \right\}.$$

- (i) *Si dimostri che $f \leq 3/2$ in tutto il suo dominio.*
- (ii) *Si dica se f ammette massimi e/o minimi globali.*
- (iii) *Si trovino tutti i punti di massimo e minimo locale e globale, discutendo la loro natura.*

Si consideri un generico $(x, y, z) \in \Omega$. Innanzitutto notiamo che $z \geq 0$, visto che $x^2 + y^2$ non può essere strettamente negativo. Per dimostrare che $f(x, y, z) \leq 3/2$ si possono allora distinguere due casi: se $z \geq 1$, allora

$$f(x, y, z) = 3xy - z \leq \frac{3}{2}(x^2 + y^2) - z \leq \left(\frac{3}{2(1+z^2)} - 1 \right) z \leq -\frac{1}{4}z \leq -\frac{1}{4} \leq \frac{3}{2}.$$

Se invece si ha $0 \leq z < 1$, allora

$$f(x, y, z) = 3xy - z \leq \frac{3}{2}(x^2 + y^2) - z \leq \frac{3z}{2(1+z^2)} - z \leq \frac{3z}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Sicuramente f non può ammettere minimi globali visto che $\inf f = -\infty$, come si può osservare notando che tutti i punti $(0, 0, z)$ con $z > 0$ appartengono ad Ω e $\lim_{z \rightarrow +\infty} f(0, 0, z) = -\infty$.

Come già notato prima, per tutti i punti $(x, y, z) \in \Omega$ con $z \geq 1$ si ha $f(x, y, z) \leq -1/4$. Dal momento che $f(0, 0, 0) = 0$, allora, un massimo per f in Ω esiste se e solo se esiste un massimo per f in $\Omega \cap \{z \leq 1\}$. Dal momento che quest'ultimo insieme è compatto e f è continua, deduciamo l'esistenza di massimi globali. Notiamo anche che la funzione f è regolare, essendo un polinomio, e che la derivata di f nella direzione z vale costantemente -1 . Di conseguenza, non esistono punti critici interni ad Ω , e quindi tutti i massimi e minimi locali e globali devono essere sul bordo di Ω .

Un modo per trovarli è utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. In alternativa, possiamo notare che la sezione di $\partial\Omega$ in cui la terza coordinata è uguale ad un qualunque $z \geq 0$ è una circonferenza sul piano xy data dall'equazione $x^2 + y^2 = r^2$, dove $r^2 = z/(1+z^2)$. Tutti i punti di tale circonferenza nei quali non si ha $x = y$ oppure $x = -y$ sono punti che non sono di massimo né minimo locale sulla circonferenza della funzione f . Di conseguenza, i punti $(x, y, z) \in \partial\Omega$ per i quali non si ha $x = \pm y$ non sono sicuramente massimi né minimi neppure

locali per f su Ω , visto che non lo sono nemmeno su una circonferenza contenuta in Ω . La ricerca di massimi e minimi locali o globali si restringe quindi a punti della forma

$$A_z^\pm = \left(\pm \sqrt{\frac{z}{2(1+z^2)}}, \pm \sqrt{\frac{z}{2(1+z^2)}}, z \right) \quad \text{oppure} \quad B_z^\pm = \left(\pm \sqrt{\frac{z}{2(1+z^2)}}, \mp \sqrt{\frac{z}{2(1+z^2)}}, z \right),$$

con $z \geq 0$. Per i punti del secondo tipo, per i quali in particolare $x = -y$, si ha

$$f(B_z^\pm) = \frac{-3z}{2(1+z^2)} - z.$$

Visto che un banale conto assicura che questa funzione è strettamente decrescente in $z \in [0, +\infty)$, nessun punto di quella forma può essere né massimo né minimo locale eccetto eventualmente l'origine (che potrebbe essere, per quanto ne sappiamo al momento, un massimo locale, visto che $f(0, 0, 0) = 0$ mentre f è strettamente negativa nei punti del secondo tipo appena considerati).

Per i punti del primo tipo, invece, si ha

$$f(A_z^\pm) = \frac{3z}{2(1+z^2)} - z =: g(z).$$

Visto che la funzione g vale 0 in 0 ed è strettamente crescente in un intorno destro di 0 (questo è conseguenza del fatto che lo sviluppo al prim'ordine di g in $z = 0$ è $z/2$), questo assicura subito che l'origine non è un massimo locale per f in Ω , visto che f è strettamente positiva in punti arbitrariamente vicini all'origine. Tutti i punti di massimo o minimo locale e globale devono dunque essere punti del tipo $A_z^\pm$ con qualche $z > 0$ per il quale valga $g'(z) = 0$.

Un semplice conto assicura che

$$g'(z) = 0 \iff (1+z^2)(1-6z^2) = 2(z-2z^3)z \iff 2z^4 + 7z^2 - 1 = 0,$$

e l'ultima equazione è verificata se e solo se

$$z^2 = \frac{-7 \pm \sqrt{57}}{4}.$$

Visto che $z^2 \geq 0$ l'unica possibilità è che $z^2 = (-7 + \sqrt{57})/4$, e ricordando che $z \geq 0$ su Ω deve essere

$$z = \bar{z} := \sqrt{\frac{-7 + \sqrt{57}}{4}}.$$

Vi sono quindi due soli punti che potrebbero essere estremali locali o globali, ossia i punti $A_{\bar{z}}^+$ e $A_{\bar{z}}^-$. Dal momento che per simmetria la f in questi due punti coincide, e ricordando che sappiamo già che deve esserci almeno un massimo globale, deduciamo finalmente che questi due punti sono entrambi punti di massimo globale.

Esercizio 4 (8 punti). *Si consideri l'insieme*

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, 0 \leq z \leq 1, x + y^2 \leq z \right\}.$$

(i) *Si calcoli il volume di Ω .*

(ii) *Si calcoli il perimetro di Ω (senza bisogno di concludere eventuali calcoli di integrale lunghi).*

Per ogni $0 \leq z \leq 1$, la sezione di Ω di altezza z è data da $\{0 \leq x \leq z, y^2 \leq z - x\}$, e quindi il volume di Ω è dato da

$$\int_{z=0}^1 \int_{x=0}^z 2\sqrt{z-x} dx dz = \int_{z=0}^1 \left[-\frac{4}{3}(z-x)^{3/2} \right]_{x=0}^z dz = \int_{z=0}^1 \frac{4}{3} z^{3/2} dz = \left[\frac{8}{15} z^{5/2} \right]_{z=0}^1 = \frac{8}{15}.$$

Per quanto riguarda il perimetro, prima di tutto possiamo scrivere

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

dove Γ_1 è la parte di $\partial\Omega$ sulla quale $x = 0$, Γ_2 quella sulla quale $z = 1$, e Γ_3 quella sulla quale $x + y^2 = z$. Visto che l'intersezione di due qualunque di queste parti ha superficie bi-dimensionale nulla, il perimetro di Ω è la somma delle superfici di Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 .

Per quanto riguarda la prima delle tre, notiamo che è contenuta nel piano $\{x = 0\}$ e in particolare $\Gamma_1 = \{x = 0, (y, z) \in E_1\}$ con $E_1 = \{0 \leq z \leq 1, y^2 \leq z\}$; di conseguenza, la superficie di Γ_1 coincide con l'area di $E_1 \subseteq \mathbb{R}^2$, che è data semplicemente da

$$\int_{z=0}^1 2\sqrt{z} dz = \frac{4}{3}.$$

Per quanto riguarda la seconda, si può fare un ragionamento simile; infatti, è contenuta nel piano $\{z = 1\}$ e in particolare $\Gamma_2 = \{z = 1, (x, y) \in E_2\}$ con $E_2 = \{0 \leq x \leq 1, y^2 \leq 1 - x\}$, e quindi la superficie di Γ_2 coincide con l'area di E_2 , che è data da

$$\int_{x=0}^1 2\sqrt{1-x} dx = \frac{4}{3}.$$

Infine, per quanto riguarda Γ_3 , possiamo scrivere

$$\Gamma_3 = \{-1 \leq y \leq 1, y^2 \leq z \leq 1, x = z - y^2\}.$$

Viene quindi comodo parametrizzare nelle variabili y e z , ottenendo che $\Gamma_3 = \Phi(B)$, dove $B = \{-1 \leq y \leq 1, y^2 \leq z \leq 1\}$ e $\Phi(y, z) = (z - y^2, y, z)$. Si ha quindi

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = (-2y, 1, 0), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = (1, 0, 1),$$

il che dà

$$\left| \frac{\partial\Phi}{\partial y} \wedge \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right| = |(1, 2y, -1)| = \sqrt{2 + 4y^2}.$$

Si conclude quindi che

$$P(\Omega) = \frac{8}{3} + \int_{y=-1}^1 \int_{z=y^2}^1 \sqrt{2 + 4y^2} dz dy = \frac{8}{3} + \int_{y=-1}^1 (1 - y^2) \sqrt{2 + 4y^2} dy,$$

ed il valore esatto dell'ultimo integrale può essere calcolato in modo noioso ma elementare tramite la sostituzione $y = \frac{\sinh t}{\sqrt{2}}$.