

Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
4/2/2025

Esercizio 1 (6 punti). Si definisca $X = \{f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ è limitata}\}$. Per ogni coppia di funzioni $f, g \in X$, si definisca poi $D_{f,g} = \{x \in (0, +\infty) : f(x) \neq g(x)\}$. Infine, si ponga

$$d(f, g) = \begin{cases} \left(\sum_{x \in D_{f,g}} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x|^2} \right) \wedge 100 & \text{se } \#(D_{f,g}) \in \mathbb{N}, \\ 100 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (i) Dimostrare che d è una distanza su X ;
- (ii) dire se (X, d) è uno spazio compatto per successioni;
- (iii) dire se (X, d) è uno spazio limitato e/o totalmente limitato;
- (iv) dire se (X, d) è uno spazio completo.

Il fatto che $d(f, g) \geq 0$ per ogni $f, g \in X$ e che sia $d(f, g) = 0$ se e solo se $f = g$ è evidente dalla definizione, così come il fatto che $d(f, g) = d(g, f)$. Siano allora f, g, h tre funzioni in X e verifichiamo che valga la disuguaglianza triangolare. Se uno tra $D_{f,g}$ e $D_{g,h}$ ha infiniti elementi, allora $d(f, g) + d(g, h) \geq 100 \geq d(f, h)$; se invece $D_{f,g}$ e $D_{g,h}$ contengono entrambi finiti elementi, allora lo stesso vale per $D_{f,h} \subseteq D_{f,g} \cup D_{g,h}$. In questo caso, se uno tra

$$\sum_{x \in D_{f,g}} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x|^2} \quad \text{e} \quad \sum_{x \in D_{g,h}} \frac{|g(x) - h(x)|}{|x|^2}$$

è maggiore di 100, allora di nuovo si ha $d(f, g) + d(g, h) \geq 100 \geq d(f, h)$. Infine, se entrambe le somme sono minori di 100 allora si ha

$$\begin{aligned} d(f, h) &\leq \sum_{x \in D_{f,h}} \frac{|f(x) - h(x)|}{|x|^2} = \sum_{x \in D_{f,g} \cup D_{g,h}} \frac{|f(x) - h(x)|}{|x|^2} \\ &\leq \sum_{x \in D_{f,g} \cup D_{g,h}} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x|^2} + \frac{|g(x) - h(x)|}{|x|^2} \\ &= \sum_{x \in D_{f,g}} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x|^2} + \sum_{x \in D_{g,h}} \frac{|g(x) - h(x)|}{|x|^2} = d(f, g) + d(g, h). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi verificato anche la disuguaglianza triangolare, e quindi d è una distanza su X .

E' facile osservare che lo spazio (X, d) non sia compatto per successioni: basta prendere la successione $\{f_n\}$ tale che f_n vale costantemente $1/n$; allora la distanza fra due qualunque delle funzioni vale 100, e quindi nessuna sottosuccessione può convergere.

Lo spazio (X, d) è chiaramente limitato, visto che la palla centrata in un qualunque elemento di X e di raggio 100 contiene tutto X ; tuttavia, non è totalmente limitato. Se prendiamo infatti un numero finito di funzioni $g_1, g_2, \dots, g_M$, basta prendere una qualsiasi f per la quale si abbia $f(j) \neq g_m(j)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e per ogni $1 \leq m \leq M$: allora $d(f, g_m) = 100$ per qualunque $1 \leq m \leq M$, e quindi le finite palle centrate nelle g_m di un qualsiasi raggio minore di 100 non possono ricoprire X .

Infine, lo spazio (X, d) non è completo. Per osservarlo, basta considerare la successione $\{f_n\} \subseteq X$ definita come

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{N}, x \geq n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Tale successione è di Cauchy: infatti, se $n \leq m \in \mathbb{N}$ si ha

$$d(f_n, f_m) = \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{j^2} \leq \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2},$$

e l'ultimo numero tende a 0 se $n \rightarrow +\infty$. D'altra parte, supponiamo che la successione $\{f_n\}$ tenda ad una qualche funzione $g \in X$. Allora deve necessariamente essere $g \equiv 0$, perché se esistesse un $x \in (0, +\infty)$ tale che $g(x) \neq 0$ allora si avrebbe $d(f_n, g) \geq (|g(x)|/|x|^2) \wedge 100$ per ogni $n \geq x$, e quindi $d(f_n, g)$ non tenderebbe a 0. Dunque l'unico possibile limite per f_n è la funzione $g \equiv 0$. Tuttavia, non si ha $f_n \rightarrow g$: infatti, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$ si ha che $D_{f_n, g}$ contiene infiniti elementi, e quindi $d(f_n, g) = 100$ per ogni n .

Esercizio 2 (6 punti). Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, yx \geq 1, x > 0\}$, e si consideri la funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x + \frac{y}{x} + e^{-y}.$$

- (i) Si dica se f ammette massimo globale;
- (ii) si dimostri che $\inf_{\Omega} f \geq 1/10$;
- (iii) si dimostri che f ammette un minimo globale;
- (iv) si discuta il numero di punti di minimo globale per f e la loro posizione.

La funzione f è continua e regolare sul dominio Ω , che è chiuso ma non limitato. La funzione non ammette massimo globale dal momento che il suo $\sup$ è $+\infty$, cosa ovvia da notare visto che per ogni $x \geq 1$ si ha $(x, 1) \in \Omega$ e $f(x, 1) \geq x$.

Si può osservare che $\inf_{\Omega} f \geq e^{-1}$, il che conclude il secondo punto visto che $e^{-1} \geq 1/10$. Infatti, se $y \leq 1$ si ha $f(x, y) \geq e^{-y} \geq e^{-1}$; se $y > 1$ e $x \leq 1$ si ha $f(x, y) \geq y/x > 1$, e infine se $x > 1$ si ha $f(x, y) \geq x > 1$.

Adesso, si può notare che $f \geq 10$ su $\Omega \setminus ([0, 10] \times [0, 100])$. Infatti, se $x > 10$ allora ovviamente $f(x, y) \geq x > 10$, e invece se $x \leq 10$ e $y \geq 100$ si ha $f(x, y) \geq y/x \geq 10$. Visto che, per esempio, $(1, 1) \in \Omega$ e $f(1, 1) = 2 + e^{-1} \leq 3$, allora l'inf di f su Ω coincide con l'inf di f su $\Omega \cap ([0, 10] \times [0, 100])$. Ma poiché questo ultimo insieme è chiuso e limitato, ricordando che f è continua deduciamo l'esistenza di un minimo globale.

Infine, cerchiamo di capire numero e posizione dei punti di minimo globale. Intanto notiamo che non ci possono essere punti di minimo globale all'interno di Ω : infatti, nell'interno di Ω la funzione f è di classe C^1 e si ha

$$\nabla f(x, y) = \left(1 - \frac{y}{x^2}, \frac{1}{x} - e^{-y}\right),$$

e quindi un punto critico interno dovrebbe soddisfare

$$y = x^2, \quad \frac{1}{x} = e^{-y}.$$

Ma la seconda equazione si può riscrivere come $x = e^y$, o anche $y = \ln x$, e quindi un punto critico interno dovrebbe avere un'ascissa che verifichi $\ln x = x^2$. E infine, questo è impossibile perché non esistono soluzioni dell'equazione $\ln x = x^2$. Per mostrarlo, basta notare che la funzione $\ln x - x^2$ è negativa per $x \leq 1$, ed ha derivata negativa per $x \geq 1$, e quindi è sempre negativa. Non essendoci punti critici interni ad Ω per f , si deduce che i punti di minimo globale non possono essere interni, e quindi devono essere sul bordo, ossia dove $y = 1/x$. Per ogni punto del tipo $(1/y, y) \in \Omega$, si ha

$$f(1/y, y) = \frac{1}{y} + y^2 + e^{-y}.$$

L'ultima funzione è però una funzione strettamente convessa della variabile $y \in (0, +\infty)$, visto che è somma di tre addendi che sono tutti e tre strettamente convessi. Dal momento che per quanto già osservato ci deve essere almeno un minimo, tale minimo è unico.

Si conclude cioè che la funzione f ammette esattamente un punto di minimo globale su Ω , e tale punto appartiene al bordo, dove $xy = 1$.

Esercizio 3 (6 punti). *Si consideri il problema di Cauchy per tempi positivi*

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) \cdot (u^2(t) - (t+1)^2), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

- (i) *Si discutano, al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$, esistenza e unicità di soluzioni massimali $u \in C^1([0, T])$;*
- (ii) *si dimostri che esistono infinite soluzioni globali limitate, e si dica se ammettono limite;*
- (iii) *si dimostri che esistono soluzioni che esplodono a $+\infty$ ed a $-\infty$ in tempo finito;*
- (iv) *si dimostri che esistono soluzioni globali non limitate.*

Dal momento che il problema è del tipo $u'(t) = F(t, u(t))$ con una funzione F regolare, sappiamo che per ogni $u_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione massimale. Si noti anche che $u \equiv 0$ è una soluzione, e quindi per unicità le soluzioni che partono positive rimangono per sempre positive, e quelle che partono negative rimangono per sempre negative. Visto poi che u è la soluzione corrispondente al dato iniziale u_0 se e solo se $-u$ è la soluzione corrispondente a $-u_0$, per simmetria possiamo limitarci a considerare le soluzioni positive.

Sia u una soluzione positiva, e si supponga che per qualche $t \geq 0$ si abbia $0 \leq u(t) < t$. Allora dall'equazione si deduce che $u'(t) < 0$, ossia u è decrescente in un intorno di t . Da questo segue che la funzione u rimane per sempre decrescente: se infatti non fosse così, potremmo chiamare $\tilde{t} > t$ il più piccolo istante tale che $u'(\tilde{t}) = 0$; tuttavia, visto che $u' < 0$ in $[t, \tilde{t})$, si avrebbe $u(\tilde{t}) < u(t) < t < \tilde{t}$, il che assicurerebbe $u'(\tilde{t}) < 0$, assurdo. In altre parole, una funzione il cui grafico entri nell'insieme $Z = \{(t, y) : 0 \leq y \leq t+1\}$ rimane per sempre in quella zona ed è decrescente, e quindi è una soluzione globale limitata. Essendo decrescente, una tale soluzione deve ammettere un limite, e tale limite deve essere per forza 0, perché altrimenti si avrebbe che $u'(t) \rightarrow -\infty$, che chiaramente è impossibile per una soluzione globale limitata. Tali soluzioni globali limitate sono sicuramente infinite, visto che ogni soluzione corrispondente a $u_0 \in (0, 1)$ è una soluzione di questo tipo.

Osserviamo ora che esistono soluzioni che esplodono a $+\infty$ in tempo finito (e quindi per quanto detto prima ve ne sono anche che esplodono a $-\infty$). Basta considerare il problema $v'(t) = v(t) \cdot (v^2(t) - 4)$: si tratta di un problema autonomo, e visto che il termine destro dell'equazione si comporta all'infinito come $v(t)^3$, quindi con esponente strettamente maggiore di 1, sappiamo che esistono soluzioni che esplodono a $+\infty$ in un tempo finito. In particolare, esiste un qualche dato iniziale v_0 tale che la corrispondente soluzione $\bar{v}$ esplode a $+\infty$ prima del tempo $t = 1$. Se prendiamo $u_0 = v_0 + 1$, la corrispondente soluzione u della nostra equazione parte strettamente maggiore di $\bar{v}$, e resta strettamente maggiore per tutti i tempi minori di 1, visto che per tali tempi $(t + 1)^2 < 2^2 = 4$. Visto che prima del tempo $t = 1$ la funzione $\bar{v}$ è esplosa a $+\infty$, lo stesso deve succedere anche per la u . Abbiamo quindi soluzioni che esplodono in tempo finito.

Possiamo essere più precisi: se una soluzione positiva u verifica $u(\bar{t}) > 2(\bar{t} + 1)$ per un qualche tempo $\bar{t}$, allora sicuramente $u'(\bar{t}) > 2$ e quindi, ragionando esattamente come prima, troviamo che $u(t) > 2(t + 1)$ per tutti i tempi $t > \bar{t}$. Ma allora per ogni $t > \bar{t}$ si ha $u'(t) > \frac{3}{4}u(t)^3$, e quindi per confronto sappiamo che la u esplode a $+\infty$ in tempo finito. Da questo possiamo dedurre che l'insieme A di tutti gli $u_0 > 0$ tali che la corrispondente soluzione esplode a $+\infty$ in tempo finito è un aperto. Infatti, se $u_0 \in A$, allora la corrispondente u esplode in tempo finito, e quindi esiste un qualche $\bar{t}$ tale che $u(\bar{t}) > 2(\bar{t} + 1)$; per dipendenza continua dai dati, la stessa disuguaglianza vale anche per le soluzioni u corrispondenti a dati iniziali sufficientemente vicini ad u_0 , e quindi per tutti questi dati la soluzione esplode in tempo finito. Ossia, appunto, A è aperto. Analogamente, è aperto l'insieme B di tutti gli $u_0 > 0$ tali che la corrispondente soluzione è globale e limitata (e quindi, per quanto visto prima, da un certo punto in poi diventa decrescente e tende a 0). Questo perché se $u_0 \in B$ allora la u tende a 0 e quindi esiste un qualche tempo $t > 0$ tale che $0 < u(t) < t$; di nuovo, per dipendenza continua dai dati questa disuguaglianza vale per le soluzioni corrispondenti a dati abbastanza vicini ad u_0 , e per quanto visto sopra tale disuguaglianza assicura che la u tende a 0, e allora B è aperto. Come al solito, si conclude osservando che un qualunque u_0 compreso tra il sup di B e l'inf di A dà origine ad una soluzione che non può essere limitata (e quindi per ogni tempo t è maggiore di t , dunque esplode a $+\infty$), e non può nemmeno esplodere in tempo finito. Si tratta cioè di una soluzione globale che tende all'infinito.

Esercizio 4 (6 punti). Si definisca $E \subseteq \mathbb{R}^3$ l'ellissoide dato da

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 9 \right\}.$$

Sia Γ la famiglia di tutte le piramidi, contenute dentro E , che abbiano il vertice sull'asse y e la cui base sia un rettangolo di lati paralleli agli assi x e z , centrato sull'asse y .

- i) Si dimostri che fra tutte le piramidi in Γ , ce n'è almeno una che massimizzi il volume;
- ii) si trovi una piramide di volume massimo, e si dica che porzione del volume di E ricopre;
- iii) si calcoli il perimetro di una generica piramide che appartiene a Γ ;
- iv) si calcoli il perimetro della piramide trovata al punto ii).

Una generica piramide in Γ è individuata da quattro parametri x, y, z, h tali che il rettangolo di base abbia vertici nei punti $(\pm x, y, \pm z)$, e che il vertice sia nel punto $(0, y + h, 0)$: affinché la piramide sia contenuta in E è necessario e sufficiente che $3x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 9$, e che $-3 \leq y + h \leq 3$. Il volume di una tale piramide è allora

$$\frac{4}{3} xzh,$$

ed è quindi una funzione continua dei parametri. Visto che i parametri ammissibili sono un insieme compatto in $\mathbb{R}^4$, sicuramente c'è una piramide che massimizza il volume.

Per trovarla, notiamo innanzitutto che possiamo restringerci a considerare le piramidi per le quali il vertice della piramide ed i vertici del rettangolo di base appartengano al bordo dell'ellisse. In particolare, possiamo supporre che $y + h = 3$. Dobbiamo allora massimizzare il volume

$$f(x, y, z) = \frac{4}{3} xz(3 - y),$$

nell'insieme dei parametri ammissibili $G = \{(x, y, z), g(x, y, z) = 0\}$, dove $g(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 9$. Possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: per farlo, notiamo che

$$\frac{3}{4} \nabla f(x, y, z) = (z(3 - y), -xz, x(3 - y)), \quad \nabla g(x, y, z) = (6x, 2y, 4z),$$

e quindi che il massimo deve soddisfare, per un qualche $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} z(3 - y) = 6\lambda x, \\ -xz = 2\lambda y, \\ x(3 - y) = 4\lambda z. \end{cases}$$

Visto che possiamo supporre $x, z > 0$, la prima e la terza equazione assicurano

$$z = \sqrt{\frac{3}{2}} x.$$

Sostituendo questa uguaglianza di nuovo nella terza equazione troviamo che

$$\lambda = \frac{3 - y}{\sqrt{24}},$$

e inserendo questo nella seconda equazione troviamo

$$-3x^2 = (3 - y)y.$$

Ponendo $g(x, y, z) = 0$, allora, troviamo

$$9 = 3x^2 + y^2 + 2z^2 = 6x^2 + y^2 = y^2 - 2(3 - y)y,$$

che si può riscrivere come

$$y^2 - 2y - 3 = 0,$$

che ha come soluzioni $y = 3$ e $y = -1$. Visto che $y = 3$ corrisponde al volume nullo (e quindi si tratta di un minimo, non di un massimo), deduciamo che il massimo corrisponde a

$$y = -1, \quad x = \frac{2}{3} \sqrt{3}, \quad z = \sqrt{2}.$$

Il volume della piramide massima è quindi

$$\frac{4}{3} xz(3-y) = \frac{32}{9} \sqrt{6},$$

ossia una porzione del volume totale di E pari a

$$\frac{\frac{32}{9} \sqrt{6}}{6\pi\sqrt{6}} = \frac{32}{54\pi}.$$

Per quanto riguarda il perimetro, consideriamo la generica piramide identificata dai parametri x, y, z, h . La base è un rettangolo di lati $2x$ e $2z$, e quindi ha area $4xz$. Le facce laterali, invece, sono quattro triangoli: due di questi hanno una base lunga $2x$ e l'altezza corrispondente lunga $\sqrt{h^2 + z^2}$, e gli altri due hanno una base lunga $2z$ e l'altezza corrispondente lunga $\sqrt{h^2 + x^2}$. Il perimetro totale è quindi

$$4xz + 2x\sqrt{h^2 + z^2} + 2z\sqrt{h^2 + x^2}.$$

La piramide trovata al punto ii) corrisponde al caso in cui

$$x = \frac{2}{3} \sqrt{3}, \quad y = -1, \quad z = \sqrt{2}, \quad h = 3 - y = 4;$$

il suo perimetro, quindi, è

$$\frac{20}{3} \sqrt{6} + 4\sqrt{\frac{26}{3}}.$$