

Secondo compitino per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
28/03/2025

Tempo a disposizione: 110 minuti.

Esercizio 1 (12 punti). Si definiscano $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e $F \subseteq \mathbb{R}^2$ gli insiemi

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^N, \sum_{i=1}^N x_i^2 \leq 1, x_j \geq 0 \forall j = 1 \dots, N \right\},$$
$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0, |x_2| \leq x_1^2 \right\}.$$

(i) Si dica per quali $\beta \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_E |x|^\beta dx,$$

è finito, e per tali β si calcoli il valore dell'integrale.

(ii) Si dica per quali $\beta \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_F |x|^\beta dx$$

è finito.

Esercizio 2 (12 punti). Si consideri il problema di Cauchy in avanti dato da

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)|u(t)|^{\frac{t}{t+1}} + \arctan t & \forall t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

- (i) Si discuta l'esistenza di soluzioni massimali al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$;
- (ii) si dimostri che esiste qualche valore di u_0 in corrispondenza del quale la soluzione esplode a $+\infty$ in tempo finito, e qualche altro valore per il quale la soluzione esplode a $-\infty$ in tempo finito;
- (iii) si dimostri che esistono soluzioni globali limitate, e si discuta il loro limite per $t \rightarrow +\infty$;
- (iv) si dica quante sono le soluzioni globali.

Esercizio 3 (12 punti). Si definiscano gli insiemi

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 - z^2 \right\},$$
$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \max\{1, 2\sqrt{2}z\} \leq x^2 + y^2 \leq 2 - z^2 \right\}$$

- (i) Si calcoli il volume di A ;
- (ii) si calcoli il volume di B .