Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
14/1/2025

Tempo a disposizione: 150 minuti.

Esercizio 1 (8 punti)**.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \frac{4}{x^2+y^2+z^2+1}\,.$$

(i) Si discutano continuità, differenziabilità ed esistenza di massimi e/o minimi globali per f.
(ii) Si dimostri che l'origine è un punto critico e si discuta la sua natura.
(iii) Si trovino tutti i punti di massimo e minimo (locale o globale), discutendone la natura.

Esercizio 2 (8 punti)**.** Si consideri il problema

$$\begin{cases} u'(t) = u^2(t) - t^2 \qquad \text{per } t > 0\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

(i) Si discutano, al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$, esistenza e unicità di soluzioni massimali $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+)$.
(ii) Si dimostri che non esiste nessuna soluzione che esplode a $-\infty$ in un tempo finito.
(iii) Si dimostri che esiste qualche soluzione che esplode a $+\infty$ in un tempo finito.
(iv) Si dimostri che esistono soluzioni globali, e che nessuna soluzione globale è limitata (*Sugg.: si considerino le zone in cui il segno di u' è positivo, o negativo.*).

Esercizio 3 (8 punti)**.** Si consideri l'insieme

$$\Omega = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ |x| + |y| \le z - z^2\Big\}\,.$$

(i) Si calcoli il volume di Ω.
(ii) Si calcoli il perimetro di Ω (senza bisogno di concludere eventuali calcoli di integrale lunghi).

Esercizio 4 (8 punti)**.** Si definisca $X = \big\{f : [0,1] \to [-1,1]^2,\ f \text{ continua}\big\}$, e si definiscano d_1 e d_2 da $X \times X$ in $\mathbb{R}^+$ come

$$d_1(f,g) = \int_{t=0}^{1} \max\Big\{|f_1(t) - g_1(t)|,\ |f_2(t) - g_2(t)|\Big\}\,dt\,,$$

$$d_2(f,g) = \max\bigg\{\int_{t=0}^{1} |f_1(t) - g_1(t)|\,dt\,, \int_{t=0}^{1} |f_2(t) - g_2(t)|\,dt\bigg\}\,.$$

(i) Si verifichi che d_1 e d_2 sono distanze su X.
(ii) Per ciascuna delle distanze d_1 e d_2, si dica se rendono X uno spazio metrico compatto, completo, limitato, totalmente limitato.