Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
4/2/2025

Tempo a disposizione: 150 minuti.

Esercizio 1 (8 punti)**.** Si consideri il problema

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) - \operatorname{sen}(t) & \text{per } t > 0\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

(i) Si discutano, al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$, esistenza e unicità di soluzioni massimali $u \in \mathrm{C}^1([0,T))$.
(ii) Si discuta l'esistenza di soluzioni globali.
(iii) Si dimostri che esistono soluzioni che esplodono a $+\infty$, soluzioni che esplodono a $-\infty$ e soluzioni limitate.
(iv) Si dica quante sono le soluzioni limitate.

Esercizio 2 (8 punti)**.** Si considerino le 2-forme ω su $\mathbb{R}^3$ che verificano le seguenti proprietà:

- ω è chiusa;
- $\omega \wedge dx_1 = 0$;
- la scrittura di ω nella base standard corrisponde a funzioni che dipendono solo dalle variabili x_1 e x_2 (ossia scrivendo come al solito $\omega = \sum_I f_I dx_I$ dove I sono i multiindici di lunghezza 2, tutte le funzioni f_I dipendono solo da x_1 e x_2).

Si esibisca un esempio di una tale forma ω (diversa dalla forma nulla), e si dica come devono essere fatte le forme del tipo richiesto (si trovi cioè una formula chiusa che identifica tutte e sole le forme con le proprietà descritte).

Esercizio 3 (8 punti)**.** Si consideri la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y,z) = 3xy - z\,,$$

dove

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, x^2 + y^2 \le \frac{z}{1+z^2} \right\}.$$

(i) Si dimostri che $f \le 3/2$ in tutto il suo dominio.
(ii) Si dica se f ammette massimi e/o minimi globali.
(iii) Si trovino tutti i punti di massimo e minimo locale e globale, discutendo la loro natura.

Esercizio 4 (8 punti)**.** Si consideri l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, x \ge 0,\, 0 \le z \le 1,\, x + y^2 \le z \right\}.$$

(i) Si calcoli il volume di Ω.
(ii) Si calcoli il perimetro di Ω (senza bisogno di concludere eventuali calcoli di integrale lunghi).