Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
3/6/2025

Tempo a disposizione: 180 minuti.

Esercizio 1 (6 punti)**.** Si definisca $X = \big\{ f : (0,+\infty) \to \mathbb{R},\, f \text{ è limitata} \big\}$. Per ogni coppia di funzioni f, $g \in X$, si definisca poi $D_{f,g} = \big\{ x \in (0,+\infty) :\ f(x) \neq g(x) \big\}$. Infine, si ponga

$$d(f,g) = \begin{cases} \left(\sum_{x \in D_{f,g}} \dfrac{|f(x) - g(x)|}{|x|^2} \right) \wedge 100 & \text{se } \#(D_{f,g}) \in \mathbb{N}\,, \\ 100 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che d è una distanza su X;
(ii) dire se (X,d) è uno spazio compatto per successioni;
(iii) dire se (X,d) è uno spazio limitato e/o totalmente limitato;
(iv) dire se (X,d) è uno spazio completo.

Esercizio 2 (6 punti)**.** Sia $\Omega = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, yx \geq 1,\, x > 0 \big\}$, e si consideri la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x + \frac{y}{x} + e^{-y}\,.$$

(i) Si dica se f ammette massimo globale;
(ii) si dimostri che $\inf_\Omega f \geq 1/10$;
(iii) si dimostri che f ammette un minimo globale;
(iv) si discuta il numero di punti di minimo globale per f e la loro posizione.

Esercizio 3 (8 punti)**.** Si consideri il problema di Cauchy per tempi positivi

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) \cdot \Big(u^2(t) - (t+1)^2 \Big)\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

(i) Si discutano, al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$, esistenza e unicità di soluzioni massimali $u \in \mathrm{C}^1([0,T))$;
(ii) si dimostri che esistono infinite soluzioni globali limitate, e si dica se ammettono limite;
(iii) si dimostri che esistono soluzioni che esplodono a $+\infty$ ed a $-\infty$ in tempo finito;
(iv) si dimostri che esistono soluzioni globali non limitate.

Esercizio 4 (12 punti)**.** Si definisca $E \subseteq \mathbb{R}^3$ l'ellissoide dato da

$$E = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, 3x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 9 \Big\}\,.$$

Sia Γ la famiglia di tutte le piramidi, contenute dentro E, che abbiano il vertice sull'asse y e la cui base sia un rettangolo di lati paralleli agli assi x e z, centrato sull'asse y.

i) Si dimostri che fra tutte le piramidi in Γ, ce n'è almeno una che massimizzi il volume;
ii) si trovi una piramide di volume massimo, e si dica che porzione del volume di E ricopre;
iii) si calcoli il perimetro di una generica piramide che appartiene a Γ;
iv) si calcoli il perimetro della piramide trovata al punto ii).