Primo compitino per il corso di Analisi Matematica 2 con soluzioni
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
23/2/2024

Esercizio 1 (12 punti)**.** *Si definisca*

$$\Omega := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x \geq \sqrt{y^2+1}\Big\}\,,$$

e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *la funzione data da*

$$f(x,y) = x^2 - |xy| + 2|y| - x\,.$$

(i) Si discutano la continuità e la differenziabilità di f *in* Ω*.*

(ii) Si discuta il limite

$$\lim_{\substack{|(x,y)|\to\infty \\ (x,y)\in\Omega}} f(x,y)\,.$$

(iii) Si dica se la funzione f *ammette punti di massimo e/o minimo globale.*

(iv) Si trovino tutti i punti di massimo e minimo globale e locale.

La funzione f è continua in tutto il suo dominio, visto che è ottenuta come somma e prodotto di funzioni elementari continue. Per quanto riguarda la differenziabilità, le funzioni che compongono f sono tutte differenziabili eccetto il modulo, differenziabile ovunque tranne in 0. Si noti che $|xy| = x|y|$ nel dominio, visto che se $(x,y) \in \Omega$ allora necessariamente $x \geq 1$. Di conseguenza, possiamo già essere sicuri che f sia differenziabile in ogni punto di Ω° (ossia ogni punto interno al dominio) tale che $y \neq 0$, mentre la differenziabilità in punti del tipo $(x,0) \in \Omega^\circ$ va investigata. Visto che $x^2 - x$ è differenziabile ovunque su Ω°, il problema è dato solo dal termine $(2-x)|y|$. Osserviamo che in tutti i punti $(x,y) \in \Omega^\circ$ con $y \neq 0$ si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(2x - 1 - |y|, (2-x)\,\frac{y}{|y|}\right).$$

Tale espressione è continua in $y = 0$ se $x = 2$, mentre i limiti per $y \searrow 0$ e per $y \nearrow 0$ sono diversi se $x \neq 2$. Deduciamo quindi che nei punti $(x,0) \in \Omega^\circ$ la funzione è differenziabile se e solo se $x = 2$.

Per quanto riguarda il limite di f all'infinito, osserviamo subito che $x \geq |y|$ per ogni punto $(x,y) \in \Omega$. Di conseguenza,

$$|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,x\,,$$

e quindi se $|(x,y)|$ diverge deve farlo anche x. Distinguiamo due possibili casi: se $|y| \leq 0.9\,x$,

$$f(x,y) \geq x^2 - 0.9x^2 - x = x\big(0.1x - 1\big) > x \geq \frac{|(x,y)|}{\sqrt{2}}\,,$$

dove la penultima disuguaglianza è vera se $x > 20$, quindi certamente è vera se $|(x, y)| > 20\sqrt{2}$. In altre parole, abbiamo dimostrato che

$$f(x, y) \geq \frac{|(x, y)|}{\sqrt{2}} \qquad \text{se } |(x, y)| > 20\sqrt{2} \text{ e } |y| \leq 0.9\, x\,.$$

Se invece $|y| > 0.9x$, ricordando che $x \geq |y|$ abbiamo che

$$f(x, y) > 0.8x \geq \frac{0.8}{\sqrt{2}}\, |(x, y)|\,.$$

Mettendo insieme la stima corrispondente al caso $|y| \leq 0.9x$ e quella corrispondente al caso $|y| > 0.9x$ deduciamo allora che

$$\lim_{\substack{|(x,y)| \to \infty \\ (x,y) \in \Omega}} f(x, y) = +\infty\,.$$

Una prima ovvia conseguenza di questo fatto è che f non ammette massimo globale. Invece, il minimo globale esiste grazie ad un ragionamento standard: se $\{P_n\} \subseteq \Omega$ è una successione minimizzante per f, ossia $f(P_n) \to \inf\{f(P),\, P \in \Omega\}$, il fatto che f diverga all'infinito assicura che la successione $\{P_n\}$ è limitata. Essendo limitata, esiste una sua sottosuccessione che converge ad un certo punto $\overline{P}$. Visto che Ω è un insieme chiuso, il punto $\overline{P}$ appartiene ad Ω, e visto che f è continua il valore f in $\overline{P}$ è il limite dei valori di f lungo la successione. Ovvero, $f(\overline{P}) = \inf\{f(P),\, P \in \Omega\}$, ossia f ammette un minimo globale.

Occupiamoci ora di cercare tutti i massimi e minimi locali e globali per f. Tali punti potrebbero essere punti sul bordo di Ω, oppure punti interni di non differenziabilità, oppure punti interni critici. Possiamo subito escludere tutti i punti interni, a prescindere dal fatto che siano o meno punti di differenziabilità: infatti, come già osservato, la derivata parziale di f nella direzione x esiste in tutti i punti di Ω°, e visto che per ogni $(x, y) \in \Omega^\circ$ si ha $x > 1$, e $x \geq |y|$, abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x, y) = 2x - 1 - |y| > 0\,.$$

Preso un qualsiasi punto di Ω°, quindi, la funzione è strettamente crescente muovendosi nella direzione orizzontale, e dunque tale punto non può essere né massimo né minimo locale (e quindi meno che mai globale).

Tutti i punti da ricercare, quindi, saranno lungo il bordo di Ω; si ricordi che almeno un minimo globale deve esserci, come già osservato. Si osservi subito che, se $(x, y) \in \partial\Omega$, allora tutti i punti (t, y) con $t > x$ appartengono ad Ω. Nessun punto di $\partial\Omega$ può quindi essere di massimo locale (e meno che mai globale), visto che muovendosi verso destra la f aumenta strettamente. Visto che, se $(x, y) \in \Omega$, allora anche $(x, -y) \in \Omega$ e $f(x, y) = f(x, -y)$, possiamo limitarci a considerare i punti di $\partial\Omega$ della forma $(x, \sqrt{x^2 - 1})$ con $x \geq 1$. La ricerca del minimo globale è semplice: si ha infatti che $f(1, 0) = 0$, e si può mostrare facilmente che $f > 0$ in qualunque punto di $\partial\Omega \setminus \{(1, 0)\}$. Per farlo, notiamo che se $x < 2$ allora

$$f(x, \sqrt{x^2 - 1}) = x^2 - x + (2 - x)\sqrt{x^2 - 1} \geq 0\,,$$

con uguaglianza solo nel caso $x = 1$. Se invece $x \geq 2$, in particolare $2\sqrt{x^2 - 1} > x$, e quindi

$$f(x, \sqrt{x^2 - 1}) = x(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 2\sqrt{x^2 - 1} - x > 0\,.$$

Esiste cioè esattamente un punto di minimo globale, e tale punto è $(1,0)$.

Si può infine escludere che esistano altri punti di minimo locale lungo il bordo di Ω. Un possibile modo di farlo è quello di definire $\varphi(x) = f(x, \sqrt{x^2-1})$ e mostrare che $\varphi'(x) > 0$ per ogni $x > 1$. Si ha infatti

$$\varphi(x) = x^2 - x + (2-x)\sqrt{x^2-1}\,,$$

e quindi

$$\varphi'(x) = 2x - 1 - \sqrt{x^2-1} + \frac{2x - x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{(2x-1)\sqrt{x^2-1} - 2x^2 + 1 + 2x}{\sqrt{x^2-1}}\,,$$

e allora dire che $\varphi' > 0$ per $x > 1$ è equivalente a dire che

$$(2x-1)\sqrt{x^2-1} > 2x^2 - 2x - 1\,;$$

visto che il termine a sinistra è positivo per $x > 1$, questa disuguaglianza è sicuramente vera se

$$(2x-1)^2(x^2-1) > (2x^2-2x-1)^2 \Longleftrightarrow 4x^3 - 3x^2 + 8x > 2\,,$$

che ovviamente è vero per ogni $x > 1$. Abbiamo cioè mostrato che $\varphi' > 0$, ossia che la f è strettamente crescente muovendosi verso destra lungo il bordo di Ω; concludiamo quindi che non esista nessun massimo o minimo locale o globale eccetto il punto $(1,0)$, che è minimo globale.

Esercizio 2 (12 punti)**.** *Si definisca lo spazio* $D = \big\{f : (5,10) \to \mathbb{R},\ f$ *è continua e limitata*$\big\}$, *e si ponga* $d : D \times D \to \mathbb{R}^+$ *come*

$$d(f,g) = \int_5^{10} \sqrt{|f(t)-g(t)|}\,dt\,.$$

(i) Si verifichi che d è una distanza, e quindi che (D,d) sia uno spazio metrico.

(ii) Per ciascuno dei due insiemi

$$A = \big\{f \in D,\ f(7) = 1\big\}\,, \qquad B = \big\{f \in A,\ \forall\, 5 < s < t < 10,\ |f(s)-f(t)| \leq 2|s-t|\big\}\,,$$

si dica se è chiuso, se è compatto, se è convesso, se è completo, se è totalmente limitato.

Innanzitutto si noti che d è ben definita: se infatti $f,\, g \in D$, allora $t \mapsto \sqrt{|f(t)-g(t)|}$ è una funzione continua e limitata, e dunque integrabile. Il fatto che d sia positiva, simmetrica, e che $d(f,g) = 0$ se e solo se $f = g$ è banale. Per controllare la disuguaglianza triangolare, basta notare che se $a,\, b \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}\,,$$

e quindi date tre funzioni $f,\, g,\, h \in D$, per ogni $5 < t < 10$ si ha

$$\sqrt{|f(t)-h(t)|} \leq \sqrt{|f(t)-g(t)| + |g(t)-h(t)|} \leq \sqrt{|f(t)-g(t)|} + \sqrt{|g(t)-h(t)|}\,,$$

e integrando questa disuguglianza per $t \in (5,10)$ si ottiene $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$.

Consideriamo adesso le proprietà degli insiemi A e B. Partiamo dall'insieme A: per ogni $n > 0$, la funzione $f_n : (5,10) \to \mathbb{R}$, definita da

$$f_n(t) = \big(1 - n|t-7|\big)^+\,,$$

è un elemento di A. Tuttavia le funzioni f_n tendono (nel senso della distanza d) alla funzione nulla, che sta in D ma non in A, quando $\lambda \to +\infty$, e quindi A non è chiuso. Per lo stesso motivo, non è completo: la successione $\{f_n\}$ è di Cauchy, visto che converge in D, ma non converge in A, e dunque A non è completo. Non essendo completo, non può essere nemmeno compatto. Infine, non è totalmente limitato perché non è neppure limitato, visto che per un qualsiasi $M \in \mathbb{R}$ l'insieme A contiene, ad esempio, funzioni che valgono costantemente M sull'intervallo $[8, 9]$. E' invece banalmente convesso, visto che se f, $g \in A$ allora per ogni $\sigma \in (0, 1)$ si ha chiaramente che $\sigma f + (1 - \sigma)g \in A$.

Passiamo ora a considerare l'insieme B. Possiamo subito osservare che sia convesso, per lo stesso motivo per cui lo è A. Siano ora f e g due funzioni in B, e sia $|f(s) - g(s)| \geq \varepsilon$ per un qualche $\varepsilon > 0$ e per un qualche $5 < s < 10$. Dalla proprietà di Lipschitz di B, si deduce che per ogni $t \in (5, 10)$ tale che $|s - t| \leq \varepsilon/5$ si deve avere $|f(t) - g(t)| \geq \varepsilon/5$. Ma allora

$$d(f, g) \geq \int_{\{t\in(5,10):\,|s-t|\leq\varepsilon/5\}} \sqrt{|f(t) - g(t)|}\, dt \geq \frac{\varepsilon}{5}\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\,.$$

Da questo deduciamo subito che, detta d_∞ la distanza del sup, per ogni f, $g \in B$ si ha

$$d_\infty(f, g) \leq 5d(f, g)^{2/3}\,.$$

Se allora una successione $\{f_n\} \subseteq B$ tende, nel senso di d, ad una funzione $f \in D$, allora deve tendere anche uniformemente. Visto che sia la proprietà di Lipschitz che il valore in $t = 7$ sono preservati per limite uniforme, e quindi limiti uniformi di funzioni in B stanno ancora in B, si deduce che i limiti di funzioni di B stanno ancora in B, ossia B è chiuso.

Osserviamo ora che le funzioni che stanno in B sono equilimitate, visto che la proprietà di Lipschitz (con costante 2) ed il fatto che il valore in 7 sia 1 assicurano che un elemento di f può assumere valori compresi tra -5 e 7. Essendo tutte Lipschitz con costante 2 sono anche equicontinue. Per il Teorema di Ascoli–Arzelà, da ogni successione in B se ne può estrarre una che converga uniformemente. Dal momento che si ha $d(f, g) \leq 5\sqrt{d_\infty(f, g)}$, e quindi che la convergenza uniforme assicura la convergenza secondo d, otteniamo che da ogni successione in B se ne può estrarre una che converga secondo la distanza d. In altre parole, (D, d) è compatto per successioni; dalla teoria, abbiamo allora che (D, d) è anche compatto, completo e totalmente limitato.

Esercizio 3 (12 punti)**.** *Per un qualsiasi $u_0 \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy in avanti dato da*

$$\begin{cases} u'(t) = e^{tu(t)} - u(t)^2 \qquad t > 0\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che esiste ed è unica la soluzione massimale $u : [0, M) \to \mathbb{R}$ di tale problema, qualunque sia il valore di u_0, con qualche $M \in (0, +\infty]$ che dipende da u_0.

(ii) Si dimostri che esiste qualche valore di u_0 per il quale la soluzione tende a $+\infty$ per $t \to M$.

(iii) Si dimostri che esiste qualche valore di u_0 per il quale la soluzione tende a $-\infty$ per $t \to M$.

(iv) Si dimostri che esiste qualche valore di u_0 per il quale la soluzione resta limitata.

(v) Si dimostri che la soluzione è globale (ossia, $M = +\infty$) se e solo se è limitata.

(vi) *Si dimostri che il valore di u_0 per il quale la soluzione resta limitata è unico (suggerimento: si supponga che esistano due diverse soluzioni limitate, e si consideri la loro differenza).*

Innanzitutto osserviamo che il problema è del tipo $u'(t) = F(t, u(t))$ con una F di classe C^1, quindi il fatto che esista una soluzione massimale unica per qualunque dato iniziale è noto.

Supponiamo adesso che u sia una soluzione, e che per un qualche $\bar{t} \geq 0$ si abbia $u(\bar{t}) > 0$. Ma allora, $u(t) > 0$ per qualunque $t \geq \bar{t}$: notiamo infatti che una soluzione che passa da 0 ha derivata strettamente positiva in tale punto, e quindi la soluzione era strettamente negativa subito prima di passare da 0; di conseguenza, una soluzione che sia strettamente positiva in qualche punto rimarrà positiva finché esiste. In realtà lo stesso vale anche per una soluzione per la quale per un qualche $\bar{t} \geq 0$ si abbia $u(\bar{t}) \geq 0$: infatti, se in $\bar{t}$ si ha che $u = 0$, allora come appena notato subito dopo $\bar{t}$ la funzione è strettamente positiva, e quindi ci si riconduce a quanto già osservato.

Notiamo ora che se $t \geq 2$ e $u(t) \geq 0$ allora si ha

$$u'(t) = e^{tu(t)} - u(t)^2 \geq e^{2u(t)} - u(t)^2 \geq 1 + 2u(t) + 2u(t)^2 - u(t)^2 \geq 1\,.$$

Si ha allora che una soluzione che in un qualche $\bar{t}$ sia positiva rimarrà sempre positiva, ed avrà derivata maggiore di 1 per tutti gli istanti successivi a $\bar{t}$ e maggiori di 2. Tale soluzione deve quindi esplodere all'infinito. Abbiamo cioè che $u(t) \to +\infty$ per $t \to M$ per ogni $u_0 \geq 0$, ma anche per valori di u_0 leggermente negativi.

Consideriamo invece una soluzione u tale che $u(\bar{t}) \leq -1$ per un qualche $\bar{t} \geq 0$. Ma allora

$$u'(\bar{t}) = e^{-t|u(\bar{t})|} - u(\bar{t})^2 \leq e^{-t} - u(\bar{t})^2 \leq 1 - u(\bar{t})^2 \leq 0\,,$$

e la disuguaglianza è stretta se $u(\bar{t}) < -1$, così come se $t > 0$. Questo assicura che una soluzione che in un qualunque momento passa sotto a -1, da quel momento in poi scenderà sempre. Essendo una funzione continua e decrescente, se $t \to M$ può tendere a $-\infty$ oppure ad un valore $L \in (-\infty, -1)$. Ma questa seconda possibilità può essere esclusa: se infatti $u(t) \to L$, allora per forza deve essere $M = +\infty$, visto che altrimenti la soluzione non sarebbe massimale. E se $u(t) \to L$ per $t \to +\infty$, con $L < -1$, allora di sicuro $u'(t) \to -L^2$. Una funzione decrescente che tenda ad un limite finito, tuttavia, non può avere derivata che tende ad un numero diverso da 0, e quindi si ha l'assurdo cercato. Ricapitolando, $u(t) \to -\infty$ per $t \to M$ per ogni $u_0 \leq -1$, ma anche per valori leggermente superiori a -1.

Sia adesso $\bar{u}_0$ un valore tale che la soluzione corrispondente, che chiamiamo $\bar{u}$ per comodità, tenda a $+\infty$: allora esiste un qualche $\bar{t} > 0$ tale che $\bar{u}(\bar{t}) > 1$. Per continuità, esiste un intorno di $\bar{u}_0$ per il quale la soluzione u verifica $|u(\bar{t}) - \bar{u}(\bar{t})| < 1/2$. Per quanto detto sopra, per ciascun u_0 in tale intorno la soluzione deve esplodere all'infinito. In altre parole, l'insieme degli u_0 per i quali la soluzione esploda all'infinito è un aperto. Per unicità della soluzione, inoltre, una soluzione che parta più in alto deve rimanere più in alto, e dunque la soluzione esplode all'infinito per tutti gli u_0 contenuti in una semiretta aperta, diciamo $(\beta, +\infty)$. Lo stesso identico ragionamento si può fare per soluzioni che tendano a $-\infty$, e quindi l'insieme degli u_0 per i quali la soluzione esploda a $-\infty$ è un aperto del tipo $(-\infty, \alpha)$. Ovviamente $\alpha \leq \beta$.

Per ogni $\alpha \leq u_0 \leq \beta$, la soluzione non può tendere a $-\infty$ e nemmeno a $+\infty$, e dunque per quanto visto sopra è costretta e restare confinata tra -1 e 0. Si tratta quindi di una soluzione limitata; d'altra parte la F è Lipschitziana su tutti gli insiemi del tipo $[0,T] \times [-1,0]$, e quindi una soluzione confinata tra -1 e 0 deve esistere almeno fino all'istante $t = T$; dal momento che T è generico, questo vuol dire che le soluzioni limitate sono tutte globali.

Come appena notato, tutte le soluzioni limitate, dunque quelle corrispondenti a $u_0 \in [\alpha, \beta]$, sono soluzioni globali. D'altra parte per qualunque soluzione non limitata si ha $|u'(t)| \geq u(t)^2/2$ per t abbastanza grande, e visto che le funzioni non nulle per le quali $u' = \pm u^2/2$ esplodono in tempo finito si ottiene per confronto che tutte le soluzioni non limitate esplodono in tempo finito, ossia non sono globali.

Per concludere l'esercizio bisogna solo notare che $\alpha = \beta$, ossia che c'è un'unica soluzione limitata. Per farlo, consideriamo una soluzione u, e supponiamo che per un qualche $\bar{t} > 0$ si abbia $u(\bar{t}) < 0$ e $u'(\bar{t}) < 0$. Allora, per tempi poco superiori a $\bar{t}$, si ha che la u è diminuita, e quindi sono diminuiti sia il termine $e^{tu(t)}$ che il termine $-u(t)^2$; ossia, per tempi poco superiori a $\bar{t}$ la u' è più piccola di $u'(\bar{t})$, e quindi negativa. In altre parole, una soluzione che sia negativa e decrescente in un qualunque punto resta decrescente per sempre, e quindi deve tendere a $-\infty$ per quanto abbiamo visto. Questo vuol dire che tutte le soluzioni globali e limitate, quindi corrispondenti ad $u_0 \in [\alpha, \beta]$, sono comprese tra -1 e 0 e sono crescenti. Questo assicura che abbiano un limite all'infinito, e come già visto tale limite deve essere 0. Supponiamo ora che ci siano due diverse soluzioni di questo tipo, chiamiamole u e v, con $v > u$. Si ha allora che

$$(v-u)'(t) = v'(t) - u'(t) = e^{tv(t)} - e^{tu(t)} - \big(v(t)^2 - u(t)^2\big) > u(t)^2 - v(t)^2 > 0\,.$$

Due diverse soluzioni globali, quindi, hanno differenza che aumenta sempre. Visto che le soluzioni globali devono tendere a 0, è impossibile che ce ne siano due diverse, perché la loro differenza dovrebbe aumentare e al tempo stesso tendere a 0; si ha cioè un'unica soluzione globale e limitata, ossia $\alpha = \beta$.