Primo compitino per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Matematica
Università di Pisa
23/2/2024

Tempo a disposizione: 150 minuti.

Esercizio 1 (12 punti)**.** Si definisca

$$\Omega := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x \geq \sqrt{y^2+1}\Big\}\,,$$

e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x,y) = x^2 - |xy| + 2|y| - x\,.$$

(i) Si discutano la continuità e la differenziabilità di f in Ω.

(ii) Si discuta il limite

$$\lim_{\substack{|(x,y)|\to\infty \\ (x,y)\in\Omega}} f(x,y)\,.$$

(iii) Si dica se la funzione f ammette punti di massimo e/o minimo globale.

(iv) Si trovino tutti i punti di massimo e minimo globale e locale.

Esercizio 2 (12 punti)**.** Si definisca lo spazio $D = \big\{f : (5,10) \to \mathbb{R},\, f$ è continua e limitata$\big\}$, e si ponga $d : D \times D \to \mathbb{R}^+$ come

$$d(f,g) = \int_5^{10} \sqrt{|f(t) - g(t)|}\, dt\,.$$

(i) Si verifichi che d è una distanza, e quindi che (D,d) sia uno spazio metrico.

(ii) Per ciascuno dei due insiemi

$$A = \big\{f \in D,\, f(7) = 1\big\}\,, \qquad B = \big\{f \in A,\, \forall\, 5 < s < t < 10,\, |f(s) - f(t)| \leq 2|s-t|\big\}\,,$$

si dica se è chiuso, se è compatto, se è convesso, se è completo, se è totalmente limitato.

Esercizio 3 (12 punti)**.** Per un qualsiasi $u_0 \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy in avanti dato da

$$\begin{cases} u'(t) = e^{tu(t)} - u(t)^2 \qquad t > 0\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che esiste ed è unica la soluzione massimale $u : [0,M) \to \mathbb{R}$ di tale problema, qualunque sia il valore di u_0, con qualche $M \in (0,+\infty]$ che dipende da u_0.

(ii) Si dimostri che esiste qualche valore di u_0 per il quale la soluzione tende a $+\infty$ per $t \to M$.

(iii) Si dimostri che esiste qualche valore di u_0 per il quale la soluzione tende a $-\infty$ per $t \to M$.

(iv) Si dimostri che esiste qualche valore di u_0 per il quale la soluzione resta limitata.

(v) Si dimostri che la soluzione è globale (ossia, $M = +\infty$) se e solo se è limitata.

(vi) Si dimostri che il valore di u_0 per il quale la soluzione resta limitata è unico (suggerimento: si supponga che esistano due diverse soluzioni limitate, e si consideri la loro differenza).