Soluzioni della prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
29/6/2023

Esercizio 1. La funzione f è chiaramente continua e differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$, essendo composta di funzioni elementari che lo sono. Riguardo al limite all'infinito, basta osservare che $y^4 > y^2 - 1$ e che

$$\left|3x + x^2 + y^4\right| < 3x^2 + 3 + x^2 + y^4 = 4x^2 + y^4 + 3 < 4x^4 + y^4 + 7 < 4(x^2 + y^2)^2 + 7\,,$$

per cui

$$\left|f(x,y)\right| < \Big(4(x^2+y^2)^2 + 8\Big)e^{-(x^2+y^2)+1}\,.$$

Dal momento che l'ultima funzione è espressa solamente in termini di x^2+y^2 e tende a 0 quando $|(x,y)| \to +\infty$, deduciamo che il limite di f all'infinito esiste ed è nullo.

Una semplice conseguenza di quanto appena notato è che esistono sia massimo che minimo globale per f, visto che f ammette punti in cui è positiva, ad esempio l'origine, e punti in cui è negativa, ad esempio il punto $(-1,0)$.

Per quanto riguarda i punti critici, il calcolo del gradiente di f assicura che (x,y) è un punto critico per f se e solo se

$$\begin{cases} \big(1+3x+x^2+y^4\big)2x = 2x+3\,, \\ \big(1+3x+x^2+y^4\big)4y^3 = 4y^3\,. \end{cases}$$

La seconda equazione è valida se $y=0$ e se $1+3x+x^2+y^4 = 1$. Nel secondo caso, tuttavia, la prima equazione diventa $2x = 2x+3$, che ovviamente non ha soluzioni. Di conseguenza, i punti critici devono necessariamente avere $y=0$. In altre parole, i punti critici sono tutti e soli i punti del tipo $(x,0)$ tali che

$$6x^2 + 2x^3 = 3\,.$$

Anche senza risolvere esplicitamente questa equazione, notiamo che ci sono al più tre soluzioni visto che è un polinomio di terzo grado. Visto che la funzione $6x^2+2x^3$ è strettamente crescente su $[0,+\infty)$, vale 0 in 0, e tende a $+\infty$ all'infinito, esiste esattamente una soluzione positiva, che chiamiamo x_1. Notiamo poi che la funzione $6x^2+2x^3$ vale 4 in -1 e tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, e quindi per continuità ci devono essere altre due soluzioni dell'equazione, una in $(-1,0)$, che chiameremo x_2, ed una in $(-\infty,-1)$, che chiameremo x_3. Dal momento che come abbiamo già osservato le soluzioni sono al più tre, deduciamo che x_1, x_2 ed x_3 sono le uniche tre soluzioni. La funzione f ha quindi esattamente tre punti critici, cioè i punti $(x_1,0)$, $(x_2,0)$ ed $(x_3,0)$. Visto che in seguito ci sarà utile, osserviamo che $x_3 > -3$. Infatti per $x=-3$ si ha $6x^2+2x^3 = 0$, e quindi $-3 < x_3 < -1$.

Andiamo adesso a studiare la natura dei tre punti critici, ricordando che due di essi devono essere il minimo globale ed il massimo globale, visto che abbiamo osservato come questi esistano e la funzione è differenziabile ovunque.

Notiamo subito che per ogni $x < 0$ si ha $f(x,0) < f(-x,0)$; è quindi sicuro che nessuno dei punti $(x_2,0)$ ed $(x_3,0)$ può essere il massimo globale, visto che x_2 ed x_3 sono entrambi negativi. Di conseguenza, $(x_1,0)$ è l'unico punto di massimo globale. Definiamo a questo punto la funzione $g(x) = f(x,0) = \big(1+3x+x^2\big)e^{-x^2}$, ed osserviamo che

$$g'(x) = e^{-x^2}\Big(3-6x^2-2x^3\Big)\,.$$

Dunque si ha che $g' > 0$ in $(-\infty, x_3)$ ed in (x_2, x_1), mentre è negativo in (x_3, x_2) ed in $(x_1, +\infty)$. Abbiamo quindi che x_1 ed x_3 sono massimi locali per g, e x_2 è minimo locale. Essendo x_3 un massimo locale per g, naturalmente $(x_3,0)$ non può essere minimo globale per f; abbiamo quindi ottenuto che $(x_2,0)$ è l'unico minimo globale, e resta solo da studiare la natura di $(x_3,0)$. Se definiamo $h(y) = f(x_3,y)$, possiamo facilmente sviluppare h vicino a 0 ottenendo

$$h(y) = \Big(1+3x_3+x_3^2+y^4\Big)e^{-x_3^2}e^{-y^4} = h(0) - e^{-x_3^2}y^4\big(3x_3+x_3^2\big)\,.$$

Si ricordi che, in precedenza, avevamo osservato che $-3 < x_3 < -1$, e quindi la parentesi nell'ultimo termine sopra è negativa, e questo assicura che 0 sia un punto di minimo locale per h. Riassumendo, il punto $(x_3,0)$ è un punto di massimo locale nella direzione delle x, e di minimo locale nella direzione delle y, e perciò non è né massimo né minimo locale per f. Non si tratta neanche di un punto di sella, visto che lo sviluppo appena calcolato assicura che uno degli autovalori dell'Hessiano di f in $(x_3,0)$ è nullo.

Esercizio 2. L'insieme C è un cilindro di raggio 1 ed altezza 10, mentre S è il semispazio in $\mathbb{R}^3$ sotto al piano $\{z = x+2\}$. Per ogni punto $(\bar x, \bar y)$ nel cerchio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$, si ha $\bar x + 2 \in [1,3] \subset (0,10)$; di conseguenza, i punti $(\bar x, \bar y, z)$ appartengono a $C \cap S$ se e solo se $0 \leq z \leq \bar x + 2$. Il volume di $C \cap S$ è quindi dato da

$$\mathrm{Vol}(C\cap S) = \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} x+2\,dx\,dy\,.$$

Per calcolare questo integrale, è molto comodo usare le coordinate polari, ottenendo quindi

$$\mathrm{Vol}(C\cap S) = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\big(\rho\cos\theta+2\big)\rho\,d\rho\,d\theta = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} 2\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\,.$$

Per quanto riguarda il perimetro di $C \cap S$, vi sono tre parti, ossia la parte inferiore (che è un cerchio di raggio 1, quindi ha area π), la parte laterale (che è una parte del bordo laterale del cilindro, con altezza variabili tra 1 e 3), e la parte superiore (che è l'insieme di tutti i punti di coordinate $(x, y, 2+x)$ con (x,y) nel cerchio di raggio 1 centrato nell'origine di $\mathbb{R}^2$). Per quanto riguarda la parte laterale, si può parametrizzare come

$$\Big\{\big(\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta, z\big),\ \theta\in[0,2\pi],\ 0\leq z\leq \cos\theta+2\Big\}\,.$$

Se chiamiamo $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione $\Phi(\theta,z) = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, z)$, un conto immediato assicura che $\big|\partial\Phi/\partial\theta \wedge \partial\Phi/\partial z\big| = 1$, per cui l'area della parte laterale è

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{\cos\theta+2} 1\,dz\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\cos\theta+2\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} 2\,d\theta = 4\pi\,.$$

Infine, la parte superiore si può parametrizzare come

$$\Big\{\big(\rho\cos\theta,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\theta+2\big),\ \theta\in[0,2\pi],\ 0\leq\rho\leq 1\Big\}\,.$$

Se ora chiamiamo $\Psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ la funzione $\Psi(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\rho\cos\theta+2)$, stavolta si calcola che $\big|\partial\Psi/\partial\theta\wedge\partial\Psi/\partial z\big|=\sqrt{2}\,\rho$, per cui l'area della parte superiore è

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1}\sqrt{2}\rho\,d\rho\,d\theta=\sqrt{2}\,\pi\,.$$

Mettendo tutto insieme abbiamo quindi

$$\mathrm{Per}(C\cap S)=\pi\big(5+\sqrt{2}\big)\,.$$

Per concludere, osserviamo che la curva $\partial C\cap\partial S$ si parametrizza immediatamente come

$$\Big\{\big(\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta,\cos\theta+2\big),\ 0\leq\theta\leq 2\pi\Big\}\,,$$

e quindi la sua lunghezza è data semplicemente da

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\big|(-\,\mathrm{sen}\,\theta,\cos\theta,-\,\mathrm{sen}\,\theta\big|\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\sqrt{1+\,\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta\,.$$