Soluzioni della prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
20/7/2023

Esercizio 1. La funzione f è sicuramente continua su tutto $\mathbb{R}^3$, dal momento che è definita come somma, prodotto e composizione di funzioni elementari che lo sono. Per quanto riguarda la differenziabilità, le funzioni elementari che compongono f sono tutte differenziabili eccetto il modulo, che è differenziabile su tutti i punti di $\mathbb{R}$ eccetto lo 0. Di conseguenza, chiamando $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ il piano su cui $x = y$, la funzione f è sicuramente differenziabile su tutto $\mathbb{R}^3 \setminus P$, mentre la differenziabilità nei punti di P deve essere ulteriormente studiata. In realtà, però, è sufficiente calcolare la derivata parziale nella direzione x nei punti di $\mathbb{R}^3 \setminus P$. Per i punti che stanno nel semispazio $\{x > y\}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{-(x-y)^2-z^2}\Big(1 - 2(x-y)\big(10 + z + x - y\big)\Big)\,,$$

mentre per i punti che stanno nel semispazio $\{x < y\}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{-(x-y)^2-z^2}\Big(-1 - 2(x-y)\big(10 + z + y - x\big)\Big)\,.$$

Dato un qualsiasi punto $(\bar{x},\bar{x},\bar{z}) \in P$, entrambe le derivate calcolate sopra ammettono limite per $(x,y,z) \to (\bar{x},\bar{x},\bar{z})$, e tali limiti sono $e^{-\bar{z}^2}$ e $-e^{-\bar{z}^2}$. Visto che questi due limiti sono diversi, qualunque sia il punto di P scelto, deduciamo che f non è differenziabile in nessun punto di P.

La funzione f non ammette limite all'infinito. Per mostrarlo è sufficiente notare ad esempio come il limite direzionale nella direzione $(0,0,1)$ sia

$$\lim_{t\to+\infty} f(0,0,t) = \lim_{t\to\infty} (10+t)e^{-t^2} = 0\,,$$

mentre quello nella direzione $(1,1,0)$ sia

$$\lim_{t\to\infty} f(t,t,0) = \lim_{t\to\infty} 10 = 10\,.$$

Per discutere se f ammetta o meno massimo o minimo globale, risulta comodo definire la funzione ausiliaria $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ come

$$g(t,z) = \big(10 + z + |t|\big)\, e^{-(t^2+z^2)}\,,$$

e notare che $f(x,y,z) = g(y-x,z)$. Di conseguenza, f ammette massimo e/o minimo globale se e solo se lo fa g; più in generale, il punto (x,y,z) è un punto di massimo o minimo locale o globale per f se e solo se il punto $(y-x,z)$ lo è per g. Lo studio dell'esistenza di massimi o minimi globali per g è molto semplice: la funzione g, infatti, è chiaramente continua su $\mathbb{R}^2$ ed il suo limite all'infinito fa 0. Visto che g ammette sia valori positivi che negativi, deduciamo che esistono sia massimi che minimi globali per g, e dunque –come detto prima– anche per f.

Iniziamo dalla ricerca di un punto di minimo globale per g. Se $(\bar t,\bar z)$ è un punto di minimo globale per g, allora di certo $10+\bar z \leq 10+\bar z+|\bar t|<0$, e dunque

$$g(0,\bar z)=\big(10+\bar z\big)\,e^{-\bar z^2}\leq \big(10+\bar z+|\bar t|\big)\,e^{-(\bar t^2+\bar z^2)}=g(\bar t,\bar z)\,;$$

la minimalità assicura che necessariamente $\bar t=0$. I punti di minimo per g, dunque, si possono trovare come i punti di minimo della funzione

$$(10+z)e^{-z^2}\,,$$

e una semplice derivata assicura che questa funzione ammette come unico minimo il punto $z=-5-\sqrt{25.5}$. Abbiamo quindi che i punti di minimo globale per f sono tutti e soli i punti $(x,x,-5-\sqrt{25.5})$, per qualsiasi $x\in\mathbb{R}$.

Quanto appena detto assicura che qualunque punto $(0,z)$ con $z\neq -5-\sqrt{25.5}$ non è un minimo locale di g nella direzione z. D'altra parte, tutti questi punti sono minimi locali nella direzione t, visto che $t=0$ è un minimo locale per $|t|$ e considerando che il termine t^2 nell'esponenziale si annulla al prim'ordine in $t=0$. Di conseguenza, tutti i punti del tipo (x,x,z) con $z\neq -5-\sqrt{25.5}$ non sono né di massimo né di minimo locale né globale.

Visto che tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ con $x\neq y$ sono punti di differenziabilità della f, tutti gli altri punti di massimo o minimo locale o globale devono essere punti critici, e si possono quindi cercare annullando il gradiente. Visto che g è simmetrica rispetto all'asse $\{t=0\}$, per cercare i suoi punti critici possiamo restringerci a considerare i punti con $t>0$, per i quali vale

$$\nabla g(t,z)=e^{-(t^2+z^2)}\Big(1-2t(10+z+t),1-2z(10+z+t)\Big)\,.$$

I punti per cui si annulla il gradiente devono quindi essere punti per i quali $t=z$, ed allora deve essere $4t^2+20t-1=0$, che come unica soluzione positiva ha $t=\frac{-5+\sqrt{26}}{2}=:\alpha$. Deduciamo che i punti (α,α) e $(-\alpha,\alpha)$ sono gli unici due punti critici di g: dal momento che la funzione è simmetrica, e che abbiamo già notato che deve esistere un massimo globale, deduciamo che questi due punti sono due punti di massimo globale per g, e non ve ne sono altri. Possiamo quindi terminare affermando che, oltre ai minimi globali per f già trovati, i massimi globali sono tutti e soli i punti $(x,x\pm\alpha,\alpha)$ per qualunque $x\in\mathbb{R}$, e non vi sono massimi o minimi locali che non siano globali.

Esercizio 2. Per calcolare il volume di Ω, possiamo notare che per ogni $z\in[-1,1]$ la sezione di Ω ad altezza z è l'ellisse $x^2+2y^2\leq C$ con $C=1-z^2$, mentre per $z\notin[-1,1]$ tale sezione è vuota. Ricordando la formula per l'area dell'ellisse, si trova che l'area della sezione di altezza $z\in[-1,1]$ è $(1-z^2)/\sqrt{2}$, e allora il volume di Ω è

$$\int_{z=-1}^{1}\pi\,\frac{1-z^2}{\sqrt2}\,dz=\frac{2\sqrt2\pi}{3}\,.$$

Per non usare la formula dell'area dell'ellisse, si poteva anche notare che Ω è l'immagine della palla unitaria, che ha volume $\frac43\,\pi$, tramite l'applicazione $(x,y,z)\mapsto(x,y/\sqrt2,z)$. e visto che il determinante del differenziale di questa applicazione è costantemente $1/\sqrt2$ la formula di cambio di coordinate nell'integrale assicura che il volume di Ω è $\frac43\,\pi\cdot\frac{1}{\sqrt2}=\frac{2\sqrt2}{3}\,\pi$.

Per quanto riguarda il perimetro, possiamo parametrizzare il bordo di Ω con coordinate "simili" a quelle sferiche; in altre parole, possiamo considerare $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ e porre

$$\Phi(\theta, \varphi) = \left(\cos\varphi \cos\theta,\ \frac{\cos\varphi \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}},\ \operatorname{sen}\varphi \right),$$

notando che Φ fornisce una parametrizzazione di $\partial\Omega$. Per calcolare il perimetro allora basta calcolare

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \left(-\cos\varphi \operatorname{sen}\theta,\ \frac{\cos\varphi\cos\theta}{\sqrt{2}},\ 0 \right) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \left(-\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ \frac{-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}},\ \cos\varphi \right),$$

e quindi

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right| = \left| \left(\frac{\cos^2\varphi\cos\theta}{\sqrt{2}}, \cos^2\varphi \operatorname{sen}\theta, \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\sqrt{2}} \right) \right| = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta}\,.$$

Di conseguenza, possiamo esprimere il perimetro di Ω come

$$\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta\, d\varphi\,.$$

Per concludere, possiamo notare che la curva da studiare è fatta dai punti $(x, x, \pm\sqrt{1-3x^2})$ con $-1 \leq x \leq 1$. Oppure, utilizzando la parametrizzazione precedente, notiamo che il punto $\Phi(\theta, \varphi)$ appartiene alla curva se e solo se $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta/\sqrt{2}$, il che è vero quando $\operatorname{sen}^2\theta = 2/3$ e $\cos^2\theta = 1/3$ e $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ sono entrambi positivi oppure entrambi negativi. Di conseguenza, si può parametrizzare la curva come i punti

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cos\varphi,\ \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\varphi,\ \operatorname{sen}\varphi \right)$$

con $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Si tratta quindi di una curva chiusa, in particolare di un'ellisse sul piano $\{x = y\}$. La lunghezza di tale curva si trova quindi come

$$\int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{2}{3} \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos^2\varphi}\, d\varphi\,.$$