Soluzioni della prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
18/9/2023

Esercizio 1. L'insieme Γ è un quarto di circonferenza di raggio 1; i punti che vi appartengono si possono individuare come i punti del tipo $(a, \sqrt{1-a^2})$ con $0 \le a \le 1$, oppure come $(\sqrt{1-b^2}, b)$ con $0 \le b \le 1$, o anche come $(\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$ con $0 \le \varphi \le \pi/2$. Si tratta di tre possibili scelte equivalenti.

Un dato punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartiene ad Ω se e soltanto se vi è un elemento $(a, b) \in \Gamma$ per il quale valgano le condizioni

$$z = b\,, \qquad\qquad (x-a)^2 + y^2 \le b\,.$$

La prima condizione identifica subito l'unico elemento di Γ possibile: deve infatti essere necessariamente $b = z$, e questo già assicura che Ω contiene solo punti per i quali z sia compreso in $[0, 1]$. Abbiamo quindi che un punto (x, y, z) con $z \notin [0, 1]$ sicuramente non appartiene ad Ω; invece, se $z \in [0, 1]$, il punto (x, y, z) sta in Ω se e solo se

$$(x - \sqrt{1-z^2})^2 + y^2 \le z\,.$$

Per ogni $z \in [0, 1]$, allora, la sezione di Ω fatta dai punti che abbiano terza coordinata pari a z è un cerchio di raggio $\sqrt{z}$, centrato nel punto $(\sqrt{1-z^2}, 0)$. Possiamo quindi parametrizzare l'insieme come

$$\Omega = \Big\{ \big(\sqrt{1-z^2} + \rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z\big) : \, 0 \le z \le 1,\, 0 \le \rho \le \sqrt{z},\, 0 \le \theta \le 2\pi \Big\}\,.$$

Per calcolare il volume di Ω basta integrare per "fette orizzontali", visto che tali fette sono appunto cerchi di raggio $\sqrt{z}$, e dunque area πz, per ogni $0 \le z \le 1$. Si ha cioè

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_{z=0}^{1} \pi z \, dz = \frac{\pi}{2}\,.$$

Per quanto riguarda invece il bordo di Ω ed il suo perimetro, si può osservare subito come il bordo di Ω sia fatto da due parti. Una delle due è il cerchio di raggio 1 sul piano $\{z = 1\}$, centrato in $(0, 0)$, che ha area π e non è molto interessante parametrizzare (si può comunque ovviamente parametrizzare come $\{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1),\, 0 \le \theta \le 2\pi\}$). L'altra parte è composta da tutti i bordi dei cerchi di raggio $\sqrt{z}$ che abbiamo individuato in precedenza, e quindi da tutti i punti nella parametrizzazione precedente di Ω per i quali $\rho = \sqrt{z}$; si ha perciò che questa seconda parte è data da

$$\Big\{ \big(\sqrt{1-z^2} + \sqrt{z}\cos\theta, \sqrt{z}\operatorname{sen}\theta, z\big) : \, 0 \le z \le 1,\, 0 \le \theta \le 2\pi \Big\}\,.$$

Definendo quindi come al solito

$$\Phi(z, \theta) = \big(\sqrt{1-z^2} + \sqrt{z}\cos\theta, \sqrt{z}\operatorname{sen}\theta, z\big)\,,$$

si calcola facilmente che

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right| = \sqrt{z+\frac{z^3\cos^2\theta}{1-z^2}+\frac{1}{4}-\frac{z^{3/2}}{\sqrt{1-z^2}}\cos\theta}\,.$$

Si conclude quindi con la formula

$$\mathrm{Per}(\Omega) = \int_{z=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\sqrt{z+\frac{z^3\cos^2\theta}{1-z^2}+\frac{1}{4}-\frac{z^{3/2}}{\sqrt{1-z^2}}\cos\theta}\,d\theta\,dz\,.$$

Esercizio 2. La funzione f è continua in quanto somma, prodotto e composizione di funzioni continue; riguardo alla differenziabilità, l'unico problema può provenire dal modulo. La funzione è quindi sicuramente differenziabile in $\{y \neq \pm 1\}$, e si deve controllare bene la differenziabilità sulle due rette $\{y = \pm 1\}$. Per simmetria della funzione possiamo anche occuparci solo della retta $\{y = 1\}$. Definiamo quindi $g^\pm = \pm(y^2-1)e^{x^2-2y^2}$, e notiamo che entrambe le funzioni sono differenziabili su tutto $\mathbb{R}^2$. Nella retta $\{y = 1\}$, quindi, la funzione f è differenziabile in tutti e soli i punti in cui i gradienti di g^+ e g^- coincidono. Visto che $\partial g^+/\partial x = \partial g^-/\partial x = 0$ su tale retta, consideriamo la derivata parziale lungo la direzione y. Si ha che

$$\frac{\partial g^+}{\partial y} - \frac{\partial g^-}{\partial y}(x,1) = 4e^{x^2-2}\,,$$

e visto che tale numero non è mai nullo deduciamo che f non è differenziabile in nessun punto della retta $\{y = 1\}$, e quindi per simmetria anche in nessun punto della retta $\{y = -1\}$.

E' immediato osservare che $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$, e da questo si deduce che $\sup f = +\infty$ e pertanto la funzione non ammette massimi globali. Per quanto riguarda i minimi globali, si può osservare che l'insieme K dove $f \leq 0$ è un insieme non vuoto, visto che contiene ad esempio il punto $(0,1)$, ed è chiuso, visto che f è continua. Si ha poi anche

$$K = \big\{x^2 + |y^2-1| \leq 1\big\} \subseteq [-1,1]\times[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\,;$$

infatti, se $x \notin [-1,1]$ allora $x^2 > 1$ e quindi $(x,y) \notin K$ a prescindere dal valore di y, e analogamente se $y \notin [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ allora $y^2 > 2$ e quindi $|y^2-1| = y^2-1 > 1$ e quindi $(x,y) \notin K$ a prescindere dal valore di x. Visto che $[-1,1]\times[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ è un rettangolo in $\mathbb{R}^2$, deduciamo che K sia anche limitato. Per il teorema di Weierstrass, la funzione continua f ammette minimi globali sul chiuso e limitato K. D'altra parte, un punto di minimo globale in K è un punto sul quale $f < 0$, e visto che fuori da K la funzione è positiva si tratta di un minimo globale su tutto $\mathbb{R}^2$. Questo assicura che esistono minimi globali.

Occupiamoci ora della ricerca dei punti di massimo e minimo globale (che si riduce alla ricerca dei punti di minimo globale, visto che come osservato non c'è massimo globale), ed allo stesso tempo anche dei punti di massimo e minimo locale. Come abbiamo osservato prima, la derivata parziale di f lungo la direzione x esiste su tutto $\mathbb{R}^2$: in un qualunque punto di massimo o minimo locale e/o globale tale derivata deve quindi essere nulla; deve cioè valere

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-2y^2}(2x)\big(x^2+|y^2-1|\big)\,.$$

Osserviamo che l'esponenziale non si annulla mai, e quindi la derivata parziale si annulla se e solo se $x = 0$: si noti infatti che la parentesi si annulla solo nei punti $(0,\pm 1)$ che sono effettivamente punti in cui $x = 0$. In altre parole, tutti i punti di massimo o minimo locale e/o globale sono necessariamente sulla retta $\{x = 0\}$.

Consideriamo allora la funzione $h(y) = f(0, y) = \big(|y^2 - 1| - 1\big)e^{-2y^2}$; visto che è simmetrica possiamo limitarci a considerarla nella semiretta $\{y \geq 0\}$. Si osservi che h è negativa su $[0, \sqrt{2}]$, positiva su $[\sqrt{2}, +\infty)$, e vale 0 in $y = 0$ ed in $y = \sqrt{2}$. Di conseguenza, il punto $y = 0$ è un massimo locale, e vi deve per forza essere (visto che h è continua) un punto di minimo globale in $(0, \sqrt{2})$ ed uno di massimo globale in $(\sqrt{2}, +\infty)$. La funzione h è inoltre derivabile dappertutto eccetto in $y = 1$, e si calcola

$$h'(y) = \begin{cases} e^{-2y^2} 2y\big(5 - 2y^2\big) & \text{se } y > 1\,, \\ e^{-2y^2} 2y\big(2y^2 - 1\big) & \text{se } 0 < y < 1\,. \end{cases}$$

Si noti che la funzione h è crescente in un intorno di $y = 1$, visto che i limiti delle derivate di h per $y \to 1^-$ ed $y \to 1^+$ esistono entrambi e sono entrambi strettamente positivi. Controllando i punti in cui si annulla la derivata e per le osservazioni fatte prima si deduce che $y = \sqrt{5/2}$ è il punto di massimo globale della h, ed $y = \sqrt{1/2}$ è il punto di minimo globale.

Avendo discusso la funzione h, torniamo alla f: gli unici punti che possono essere massimi o minimi, locali o globali, sono quindi i punti $A = (0, 0)$, $B^\pm = (0, \pm\sqrt{1/2})$, e $C^\pm = (0, \pm\sqrt{5/2})$. Per quanto riguarda il punto A, si osservi che $f(A) = 0$, e arbitrariamente vicino ad A si trovano sia punti con $f > 0$ che con $f < 0$. Si ha infatti immediatamente che per ogni numero ε molto piccolo si ha $f(\varepsilon, 0) > 0$ e $f(0, \varepsilon) < 0$. Di conseguenza, il punto A non è né massimo né minimo locale.

Per quanto riguarda i punti $B^\pm$, devono per forza essere i punti di minimo globale: abbiamo infatti osservato che il minimo globale esiste ed è strettamente negativo, e visto che $f(A) = 0$ e $f(C^\pm) > 0$ si ottiene che B^+ e B^- sono i due punti di minimo globale.

Per concludere, consideriamo i punti C^+ e C^-: tali punti sono di massimo locale nelle direzione y, come abbiamo visto prima. Tuttavia, nella direzione x sono invece di minimo locale, visto che

$$f\left(x, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)e^{x^2-5} = \frac{1}{2}e^{x^2-5} + x^2 e^{x^2-5} \geq \frac{1}{2}e^{x^2-5} \geq \frac{1}{2}e^{-5} = f\left(0, \sqrt{\frac{5}{2}}\right).$$

Si ottiene quindi che anche i punti C^+ e C^- non sono né di massimo né di minimo locale o globale, e dunque gli unici punti “interessanti” rimangono i due minimi globali già trovati, ossia B^+ e B^-.