Soluzioni della prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
12/6/2023

Esercizio 1. Per ogni $x \in [0,\pi]$, l'intersezione tra S ed il piano $\{x\} \times \mathbb{R}^2$ è il segmento che unisce il punto $(x,-x,\operatorname{sen} x)$ col punto $(x,x,\operatorname{sen} x)$. Tale segmento si parametrizza in modo naturale come i punti del tipo $(x,y,\operatorname{sen} x)$ dove la variabile y si muove nell'intervallo $[-x,x]$. Una scrittura in forma parametrica di S è quindi

$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le \pi,\, -x \le y \le x,\, z = \operatorname{sen} x\Big\}.$$

Per quanto riguarda l'area di S, basta scrivere $\Phi(x,y) = (x,y,\operatorname{sen} x)$ e notare che $S = \Phi(T)$, dove $T = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi,\, -x \le y \le x\big\}$. Dal momento che

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \big(1,0,\cos x\big)\,, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \big(0,1,0\big)\,,$$

si ha che

$$\operatorname{Area}(S) = \int_{x=0}^{\pi}\int_{y=-x}^{x} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dy\,dx = 2\int_{x=0}^{\pi} x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,.$$

Per quanto riguarda l'insieme Ω, è composto da segmenti verticali (ossia paralleli all'asse z). Più precisamente, per ogni $(x,y,z) \in S$ il segmento $A_{(x,y,z)}$ è un segmento di lunghezza $z = \operatorname{sen} x$. Perciò, calcolando il volume di Ω per "fili verticali", si ha

$$\operatorname{Vol}(\Omega) = \int_{x=0}^{\pi}\int_{y=-x}^{x} \operatorname{sen} x\,dy\,dx = \int_{x=0}^{\pi} 2x \operatorname{sen} x\,dy\,dx = \Big[-2x\cos x + 2\operatorname{sen} x\Big]_{x=0}^{\pi} = 2\pi\,.$$

Esercizio 2. La funzione è chiaramente continua e differenziabile su tutto $\mathbb{R}^3$ essendo composizione di funzioni che lo sono (in particolare il denominatore è sempre strettamente positivo essendo un'esponenziale). Non esiste limite all'infinito: infatti, nei punti del tipo $(0,y,0)$ il valore della funzione è $\operatorname{sen}(y)e^y$, che assume valori arbitrariamente grandi e piccoli quando $y \to \infty$, visto che e^y tende all'infinito mentre $\operatorname{sen}(y)$ assume valori sia positivi che negativi.

Questo assicura non solo che non esiste limite all'infinito, ma anche più in generale che $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$, e dunque la funzione non ammette né massimi né minimi globali.

Cerchiamo adesso di trovare i punti critici. Il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = e^{y-(x^2+z^2)}\Big(2x\big(1-(x^2+z^2+\operatorname{sen} y)\big), \cos y + x^2+z^2+\operatorname{sen} y, 2z\big(1-(x^2+z^2+\operatorname{sen} y)\big)\Big)\,,$$

e quindi il punto (x,y,z) è un punto critico se e solo se

$$2x\big(1-(x^2+z^2+\operatorname{sen} y)\big) = \cos y + (x^2+z^2+\operatorname{sen} y) = 2z\big(1-(x^2+z^2+\operatorname{sen} y)\big) = 0\,.$$

Possiamo distinguere due possibilità, perché un punto sia critico, ossia $x^2+z^2+\operatorname{sen} y = 1$ oppure no. Se $x^2+z^2+\operatorname{sen} y = 1$, allora la prima e la terza uguaglianza di sopra sono automaticamente vere, e la seconda è vera se e solo se $\cos y = -1$. D'altra parte, se $\cos y = -1$ allora necessariamente $\operatorname{sen} y = 0$, e dunque deve essere $x^2 + z^2 = 1$. Una classe di punti critici è data quindi da tutti i punti del tipo

$$\big(\cos\theta, (2k+1)\pi, \operatorname{sen}\theta\big), \qquad \text{con } \theta \in [0, 2\pi),\ k \in \mathbb{Z}\,. \tag{1}$$

I punti critici che non appartengono a questa classe verificano $x^2 + z^2 + \operatorname{sen} y \neq 1$, e dunque necessariamente deve essere $x = z = 0$ perché la prima e la terza uguaglianza siano verificate; a questo punto, la seconda uguaglianza è verificata se e solo se $\operatorname{sen} y + \cos y = 0$, e dunque gli altri punti critici sono tutti quelli del tipo

$$\left(0, \left(\frac{3}{4} + k\right)\pi, 0\right), \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}\,. \tag{2}$$

Cerchiamo adesso di studiare la natura di tutti i punti critici trovati. Partiamo da quelli del tipo (2): per tali punti, la matrice Hessiana si calcola facilmente come

$$\begin{pmatrix} 2(1 - \operatorname{sen} y)e^y & 0 & 0 \\ 0 & e^y(\cos y - \operatorname{sen} y) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - \operatorname{sen} y)e^y \end{pmatrix}.$$

Si tratta di una matrice in forma diagonale, per la quale il primo ed il terzo degli elementi della diagonale sono positivi per qualunque k intero; il secondo elemento è invece positivo per k dispari e negativo per k pari. Di conseguenza, possiamo dire che tutti i punti critici della forma (2) sono minimi locali se k è dispari, e punti di sella se k è pari.

Guardiamo adesso i punti del tipo (1): in questo caso, un semplice calcolo assicura che la matrice Hessiana è

$$e^{y-1}\begin{pmatrix} -4x^2 & 2x & -4xz \\ 2x & -1 & 2z \\ -4xz & 2z & -4z^2 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono 0 (con molteplicità 2) e $-5e^{y-1}$. Questo non dà ancora certezza della natura di questi punti critici: avendo due autovalori nulli ed il terzo negativo si esclude che i punti siano minimi locali o punti di sella, e si potrebbe quindi trattare o di massimi locali oppure di punti che non sono né massimi locali, né minimi locali, né punti di sella.

In effetti quello che succede è proprio che si tratti di punti che non sono né massimi locali, né minimi locali, né punti di sella: per vederlo, per un qualunque $\theta \in [0, 2\pi)$ e $k \in \mathbb{Z}$ consideriamo il punto critico $P = \big(\cos\theta, (2k+1)\pi, \operatorname{sen}\theta\big)$, e per ogni numero piccolo $\varepsilon > 0$ definiamo il punto $P_\varepsilon = \big(\sqrt{1+\varepsilon}\cos\theta, (2k+1)\pi + \varepsilon, \sqrt{1+\varepsilon}\operatorname{sen}\theta\big)$. Naturalmente P_ε converge a P quando $\varepsilon \searrow 0$, e inoltre si ha

$$f(P) = e^{(2k+1)\pi - 1}\,, \qquad\qquad f(P_\varepsilon) = e^{(2k+1)\pi-1}\big(1 + \varepsilon - \operatorname{sen}\varepsilon\big)\,,$$

per cui $f(P_\varepsilon) > f(P)$ per ogni numero piccolo $\varepsilon > 0$, e questo esclude che P sia un massimo locale.

Un metodo più rapido per discutere i punti critici di f sarebbe stato notare che la funzione dipende dalle variabili x e z solo in termini di x^2+z^2: avremmo quindi potuto definire la funzione

$$g(t,y) = \frac{t^2 + \operatorname{sen}(y)}{e^{t^2-y}}$$

e notare che $f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+z^2}, y)$. Lo studio dei punti critici di f sarebbe quindi stato possibile attraverso lo studio dei punti critici di g: avremmo raggiunto esattamente le stesse conclusioni, ma in modo più rapido avendo a che fare con matrici 2×2 invece che 3×3.