

Scritto per il corso di Analisi Matematica II
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
29/6/2023

(Prima parte)

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Scrivere solo la risposta nella tabella in fondo, in modo leggibile ed inequivocabile.

Nome:

Cognome:

Numero di matricola:

Esercizio 1. Si calcoli il volume dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 - z \right\}.$$

Esercizio 2. Si definisca $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ come $f(x, y, z) = (xe^{yz-x^2}, \text{sen}(yz + x^2)z)$. Si calcoli $Df(1, 1, 1)$.

Esercizio 3. Per ogni direzione $\theta \in [0, 2, \pi)$ si calcoli, se esiste, il limite direzionale all'infinito in direzione θ della funzione

$$\frac{e^{xy}}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Esercizio 4. Si calcoli il perimetro dell'insieme $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{2}{3}x^{3/2} \right\}$.

Esercizio 5. Si calcoli lo sviluppo di Taylor fino al quarto ordine in $(x, y) = (0, 0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = \cos\left(2(e^{xy} - \cos(x - y))\right)$.

Esercizio 6. Si calcoli l'area di $\Gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1 \right\}$.

Esercizio 7. Si dica quanti sono i punti critici della funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2)(x - y)$.

Esercizio 8. Si calcoli $\int_D y^3 \cos(xy)$, essendo $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq \pi^{1/3} \right\}$.

1	2	3	4	5	6	7	8

Scritto per il corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
29/6/2023

(Soluzioni)

Esercizio	Soluzione
1	2π
2	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 \cos 2 & \cos 2 & \cos 2 + \operatorname{sen} 2 \end{pmatrix}$
3	il limite è $+\infty$ per $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, e 0 altrimenti
4	$1 + \frac{2}{3} 2^{3/2}$
5	$1 - \frac{x^4 + y^4}{2} - x^2 y^2$
6	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
7	Un unico punto critico (l'origine)
8	$\frac{2}{3}$