

Scritto per il corso di Analisi Matematica II  
corso di laurea in Ingegneria Biomedica  
Università di Pisa  
29/6/2023

**(Prima parte)**

*Tempo a disposizione: 60 minuti.*

*Scrivere solo la risposta nella tabella in fondo, in modo leggibile ed inequivocabile.*

Nome:

Cognome:

Numero di matricola:

**Esercizio 1.** Si calcoli il volume dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 - z \right\}.$$

**Esercizio 2.** Si definisca  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  come  $f(x, y, z) = (xe^{yz-x^2}, \text{sen}(yz + x^2)z)$ . Si calcoli  $Df(1, 1, 1)$ .

**Esercizio 3.** Per ogni direzione  $\theta \in [0, 2, \pi)$  si calcoli, se esiste, il limite direzionale all'infinito in direzione  $\theta$  della funzione

$$\frac{e^{xy}}{x^2 + y^2 + 1}.$$

**Esercizio 4.** Si calcoli il perimetro dell'insieme  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{2}{3}x^{3/2} \right\}$ .

**Esercizio 5.** Si calcoli lo sviluppo di Taylor fino al quarto ordine in  $(x, y) = (0, 0)$  della funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(x, y) = \cos\left(2(e^{xy} - \cos(x - y))\right)$ .

**Esercizio 6.** Si calcoli l'area di  $\Gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1 \right\}$ .

**Esercizio 7.** Si dica quanti sono i punti critici della funzione  $f(x, y) = (x^2 + y^2)(x - y)$ .

**Esercizio 8.** Si calcoli  $\int_D y^3 \cos(xy)$ , essendo  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq \pi^{1/3} \right\}$ .

1	2	3	4	5	6	7	8

Scritto per il corso di Analisi Matematica  
corso di laurea in Ingegneria Gestionale  
Università di Pisa  
29/6/2023

**(Soluzioni)**

Esercizio	Soluzione
1	$2\pi$
2	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 \cos 2 & \cos 2 & \cos 2 + \operatorname{sen} 2 \end{pmatrix}$
3	il limite è $+\infty$ per $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ , e 0 altrimenti
4	$1 + \frac{2}{3} 2^{3/2}$
5	$1 - \frac{x^4 + y^4}{2} - x^2 y^2$
6	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
7	Un unico punto critico (l'origine)
8	$\frac{2}{3}$