Esercizi per il corso di
"Calcolo delle variazioni"

I) Si consideri il problema $\inf\{\mathcal{F}(u) : u \in \mathcal{A}\}$, essendo

$$\mathcal{A} = \Big\{u \in AC\big([0,1]\big) : u(0) = 0,\, u(1) = \beta\Big\}, \qquad \mathcal{F}(u) = \int_{x=0}^{1} F\big(x, u(x), u'(x)\big)\, dx\,.$$

con un generico $\beta \in \mathbb{R}$. Si studi, eventualmente anche in dipendenza di β (e nel caso **e)** anche del parametro $\alpha > 0$), quanto più possibile dei seguenti casi: in particolare, esistenza o meno di un minimo, eventuale valore esatto del minimo, presenza o meno di fenomeno di Laurentiev, regolarità dei minimi, eventuale scrittura esplicita delle funzioni minimizzanti, e così via.

a) $F(x, u, u') = e^{u'(x)}$,

b) $F(x, u, u') = \sin^2\big(u'(x)^2\big)$,

c) $F(x, u, u') = u^2(x) + \sin^2\big(u'(x)\big)$,

d) $F(x, u, u') = u^2(x) + u'(x)^2 + \sin^2\big(u'(x)\big)$,

e) $F(x, u, u') = e^{-x} u'(x)^{\alpha}$,

f) $F(x, u, u') = \left(x^2 - x + \dfrac{1}{5}\right) u'(x)^4$.

II) Si discuta se i seguenti sottoinsiemi di $L^1(I)$ sono relativamente debolmente compatti per successioni:

(i) $A_1 = \Big\{u \in L^1(I) : \|u\|_{L^1} \leq 1\Big\}$;

(ii) $A_2 = \Big\{u \in L^1(I) : \|u\|_{L^1} \leq 1,\, \int_I u(x)/\sin(x)\, dx \leq 1\Big\}$;

(iii) $A_3 = \Big\{u \in L^1(I) : \|u\|_{L^1} \leq 1,\, \int_I u(x)/\big|\sin(x-\theta)\big|\, dx \leq 1\, \forall \theta \in (0, \pi)\Big\}$.

(iv) Cosa si sa dire dell'insieme A_3?

III) Si consideri il funzionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \Big(1 - u(x)^2\Big)^2 + \Big(u'(x) - 1\Big)^2 \varphi\big(u'(x)\big)\, dt$$

definito su $\{u \in AC(I) : u(0) = 0,\, u(1) = 2\}$, e dove $\varphi(s) = 1$ per $|s| \geq 1/2$, e $\varphi(s) = 2$ per $|s| < 1/2$.

(i) Si dica se $\mathcal{F}$ è semicontinuo inferiore.

(ii) Si dica se $\mathcal{F}$ ammette minimo.

IV) Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, e $g(t) \leq 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funzione decrescente. Si discutano condizioni necessarie e/o sufficienti che assicurino che

$$\int_0^1 f(t)g'(t)\,dt \leq 0\,.$$

V) Si consideri il problema di minimizzare $\mathcal{F}(u)$ tra le funzioni u assolutamente continue sull'intervallo $I = (0,1)$ che valgano 0 in 0 ed 1 in 1, ed essendo

$$\mathcal{F}(u) := \int_{x=0}^1 \big(2+\sin(x)\big)u'(x)^4\gamma\big(u(x)\big)\,dx\,,$$

essendo $\gamma(z) = 2$ per $|z| < 20$, e $\gamma(z) = 1$ per $|z| \geq 20$.
(i) Si dica se per questo problema vi è fenomeno di Laurentieff.
(ii) Si dica se per questo problema esiste soluzione.

VI) Sia $K > 0$ e si consideri, nell'insieme

$$\mathcal{A} = \big\{u \in AC([0,\pi]) :\ u(0) = K,\ u(\pi) = K+1\big\}\,,$$

il problema di minimizzare il funzionale

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^\pi \big(1+|x|^6\big)e^{|u(x)|^5}u'(x)^2\,dx\,.$$

(i) Si dimostri che esiste una soluzione.
(ii) Si dia una stima della regolarità delle soluzioni.
(iii) Si discuta, anche in dipendenza da K, se è vero che esistono minimi C^∞.