Soluzioni della prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
27/1/2022

Esercizio 1. Visto che i polinomi, le funzioni esponenziali ed il modulo sono funzioni continue, f risulta continua in ogni punto di $\mathbb{R}^2$. Per quanto riguarda la differenziabilità, tutte le funzioni da cui è composta f sono differenziabili su tutto $\mathbb{R}$, eccetto il modulo che è differenziabile solo su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Di conseguenza, la funzione f è sicuramente differenziabile fuori dagli assi, mentre la differenziabilità sugli assi va verificata.

Dal momento che $|\operatorname{sen}(\theta)| \leq |\theta|$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, deduciamo che in un intorno dell'origine $|f(x,y)| \leq (|x|+|y|)(x^2+3y^2) \leq x^2+3y^2$, e di conseguenza f è differenziabile anche nell'origine, con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Notiamo ora che per un qualunque punto (x,y) con $x > 0$, $y > 0$ si ha

$$\nabla f(x,y) = \Big(\operatorname{sen}(x^2+3y^2) + 2x(x+y)\cos(x^2+3y^2), \operatorname{sen}(x^2+3y^2) + 6y(x+y)\cos(x^2+3y^2) \Big),$$

mentre se $x > 0$, $y < 0$ si ha

$$\nabla f(x,y) = \Big(\operatorname{sen}(x^2+3y^2) + 2x(x-y)\cos(x^2+3y^2), -\operatorname{sen}(x^2+3y^2) + 6y(x-y)\cos(x^2+3y^2) \Big).$$

Se fissiamo quindi un qualunque $x > 0$, il gradiente di f si estende ad una funzione continua in un intorno di $(x,0)$ se e solo se $\operatorname{sen}(x^2) = 0$. Questo assicura che f è differenziabile in $(x,0)$ se $\operatorname{sen}(x^2) = 0$; d'altra parte, se $\operatorname{sen}(x^2) \neq 0$, esistono entrambi i limiti

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t} \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t},$$

e tali limiti sono diversi. Di conseguenza, f non è differenziabile in $(x,0)$. Ragionando esattamente nello stesso modo vicino a $(x,0)$ con $x < 0$, e vicino a $(0,y)$ con $y > 0$ e con $y < 0$, deduciamo che sugli assi la funzione è differenziabile se e solo se $\sin(x^2+3y^2) = 0$.

E' facile osservare che $\sup f = +\infty$ ed $\inf f = -\infty$; per farlo è sufficiente, ad esempio, notare che per ogni numero naturale k si ha $f(\sqrt{2k\pi + \pi/2}, 0) = \sqrt{2k\pi + \pi/2}$, e questo tende a $+\infty$ per $k \to \infty$, e quindi si ottiene che $\sup f = +\infty$. Analogamente, $f(\sqrt{2k\pi - \pi/2}, 0) = -\sqrt{2k\pi - \pi/2}$, e questo tende a $-\infty$ per $k \to \infty$, assicurando che $\inf f = -\infty$. Di conseguenza, la funzione non può ammettere né massimi né minimi globali.

Consideriamo adesso, per ogni numero naturale k, l'insieme

$$A_k = \big\{ (x,y) : k\pi < x^2 + 3y^2 < (k+1)\pi \big\},$$

che è contenuto tra due ellissi. Osserviamo che $f = 0$ nel bordo di ogni insieme A_k, ed è strettamente positiva all'interno di A_k per tutti i k pari, e strettamente negativa per tutti i k dispari. Visto che ogni $\overline{A_k}$ è un insieme chiuso e limitato e che f è continua, vi saranno almeno un massimo ed un minimo di f in $\overline{A_k}$. Se k è pari, in particolare, saranno punti di minimo tutti e soli i punti del bordo di A_k, visto che la funzione vale 0 su di essi ed è strettamente positiva all'interno; tali punti, quindi, a parte l'origine che è considerata dopo, non saranno né di massimo né di minimo locale per f su tutto $\mathbb{R}^2$ (visto che la funzione è strettamente negativa appena si esce da A_k). I punti di massimo di f in $\overline{A_k}$, invece, saranno necessariamente all'interno, e saranno dunque massimi locali per la f su $\mathbb{R}^2$. Analogamente, per ogni k dispari, i punti di minimo di f su $\overline{A_k}$ saranno interni, e dunque minimi locali per f su $\mathbb{R}^2$. Questo effettivamente assicura che f abbia infiniti massimi e minimi locali.

Per quanto riguarda il punto $(0,0)$, tale punto è sicuramente di minimo locale, visto che $f(0,0) = 0$ ma f è strettamente positiva in ogni punto di A_0. Consideriamo ora i punti degli assi diversi dall'origine; in particolare, fissato un numero naturale k consideriamo l'intersezione tra gli assi e l'insieme A_k, che è formata da quattro segmenti. Mostriamo che nessun punto di tali segmenti può essere un massimo o un minimo locale. Supponiamo ad esempio che k sia pari, e consideriamo il segmento $S = A_k \cap \mathbb{R}^+ \times \{0\}$: un ragionamento identico funziona sugli altri tre segmenti sui quali A_k incontra gli assi, e nel caso in cui k sia dispari. Notiamo che f è nulla agli estremi del segmento S, ed è strettamente positiva all'interno. In particolare, un semplice conto assicura che f prima sale e poi scende in questo segmento, ed ha un unico massimo in un qualche punto P del segmento. Ovviamente i punti del segmento diversi da P non possono essere massimi o minimi locali per f, visto che non lo sono nemmeno per la restrizione di f al segmento S. Il punto P, invece, è un massimo locale di f relativamente al segmento. Tuttavia, tale punto certamente non può essere un massimo locale di f su $\mathbb{R}^2$ visto che f cresce non appena ci si stacca dall'asse x, come assicura il calcolo delle derivate parziali fatto in precedenza. Dunque nessun punto sugli assi, eccetto l'origine, è un massimo o un minimo locale per f.

Cerchiamo adesso i punti critici di f; abbiamo già visto che l'origine è un punto critico, e non vi sono altri punti critici sugli assi, visto che f sugli assi è differenziabile solo nei punti di bordo di qualche insieme A_k, e in tali punti il gradiente non si annulla mai eccetto che nell'origine. Per cercare gli altri punti critici, allora, visto che f è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi, possiamo restringerci al quadrante $\{x > 0,\ y > 0\}$. Su tale quadrante, il gradiente (che abbiamo già calcolto prima) si annulla se e solo se

$$\operatorname{sen}(x^2 + 3y^2) + 2x(x+y)\cos(x^2 + 3y^2) = \operatorname{sen}(x^2 + 3y^2) + 6y(x+y)\cos(x^2 + 3y^2) = 0\,.$$

Osserviamo che in un punto critico il coseno di $x^2 + 3y^2$ non può annullarsi, perché altrimenti il seno varrebbe 1 o -1, e dunque le due equazioni appena scritte non sarebbero risolte. Possiamo allora dividere per il coseno e trovare che un punto è critico se e solo se si verifica

$$\tan(x^2 + 3y^2) = -2x(x+y) = -6y(x+y)\,.$$

Dal momento che $x + y > 0$ perché siamo nel primo quadrante aperto, si deduce che necessariamente $x = 3y$, e allora i punti critici sono tutti i punti del tipo $(3y, y)$ che verifichino

$$\tan(12y^2) = -24y^2\,.$$

L'equazione $\tan t = -2t$, per $t > 0$, ha esattamente una soluzione in ogni intervallo $[k\pi, (k+1)\pi]$. Si deduce che all'interno di ogni insieme A_k, sempre nel primo quadrante, esiste esattamente un punto critico (x_k, y_k), che si trova sulla retta $x = 3y$ e tale che l'equazione $\tan(12y^2) = -24y^2$

è soddisfatta. Nell'intero A_k, allora, vi sono esattamente quattro punti critici, cioè i punti $(\pm x_k, \pm y_k)$. La natura di tutti e quattro questi punti critici deve essere la stessa per simmetria; d'altra parte, visto che in A_k vi è almeno un massimo locale se k è pari e un minimo locale se k è dispari, e visto che tale punto deve essere necessariamente un punto critico visto che i punti in cui f non è differenziabile non sono massimi né minimi locali, si deduce che tutti e quattro i punti $(\pm x_k, \pm y_k)$ sono punti di massimo locale se k è pari, e di minimo locale se k è dispari. Dal momento che l'insieme $\{x^2 + 3y^2 \leq 100\pi\}$ è dato dall'unione degli insiemi $\overline{A_k}$ con $0 \leq k \leq 99$, la funzione f ammette in tale insieme 401 punti critici, e di questi 201 sono minimi locali (l'origine ed i 200 contenuti negli insiemi A_k con k dispari) e 200 sono massimi locali (quelli contenuti negli insiemi A_k con k pari).

Esercizio 2. Il generico punto $(t, \lambda \cos t, \lambda \operatorname{sen} t)$ contenuto nella retta

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x = t, \; y = \lambda \cos t, \; z = \lambda \operatorname{sen} t, \; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

ha distanza $|\lambda|$ dal punto $(t, 0, 0)$. Visto che il segmento S_t è formato da tutti i punti che distano meno di t dal punto $(t, 0, 0)$, si ottiene che $S_t = \{(t, \lambda \cos t, \lambda \operatorname{sen} t) \in \mathbb{R}^3 : \, -t \leq \lambda \leq t\}$. Gli estremi del segmento S_t sono quindi i punti

$$P_t \equiv (t, -t \cos t, -t \operatorname{sen} t) \,, \qquad\qquad Q_t \equiv (t, t \cos t, t \operatorname{sen} t) \,.$$

Una comoda espressione di Γ in forma parametrica è dunque

$$\Gamma = \Big\{(t, \lambda \cos t, \lambda \operatorname{sen} t) : \, 0 \leq t \leq 2\pi, \; -t \leq \lambda \leq t\Big\} \,.$$

La superficie Γ è quindi data da $\varphi(T)$, dove $T = \{(\lambda, \, t) : \, 0 \leq t \leq 2\pi, \; -t \leq \lambda \leq t\}$ è un triangolo nello spazio dei parametri t, λ, e la funzione φ è data da

$$\varphi(\lambda, t) = (t, \lambda \cos t, \lambda \operatorname{sen} t) \,.$$

Per calcolare l'area della superficie Γ è quindi sufficiente notare che

$$\nabla \varphi(\lambda, t) = \begin{pmatrix} 0 & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 1 & -\lambda \operatorname{sen} t & \lambda \cos t \end{pmatrix} \,,$$

per cui

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial f}{\partial t} = \Big(\lambda, \; \operatorname{sen} t, \; \cos t\Big) \,.$$

Si ha quindi che l'area della superficie Γ è data da

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^{2\pi} \int_{\lambda=-t}^{t} \sqrt{1 + \lambda^2} \, d\lambda \, dt &= 2 \int_{t=0}^{2\pi} \int_{\lambda=0}^{t} \sqrt{1 + \lambda^2} \, d\lambda \, dt = 2 \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{t=\lambda}^{2\pi} \sqrt{1 + \lambda^2} \, dt \, d\lambda \\
&= 2 \int_{\lambda=0}^{2\pi} (2\pi - \lambda) \sqrt{1 + \lambda^2} \, d\lambda = 4\pi \int_{\lambda=0}^{2\pi} \sqrt{1 + \lambda^2} \, d\lambda - 2 \int_{\lambda=0}^{2\pi} \lambda \sqrt{1 + \lambda^2} \, d\lambda \\
&= 4\pi \left[\frac{\operatorname{arcsinh} \lambda + \lambda \sqrt{1 + \lambda^2}}{2} \right]_{\lambda=0}^{2\pi} - 2 \left[\frac{1}{3} \, (1 + \lambda^2)^{3/2} \right]_{\lambda=0}^{2\pi} \\
&= 2\pi \Big(\operatorname{arcsinh} (2\pi) + 2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} \Big) - \frac{2}{3} \left(\Big(1 + 4\pi^2\Big)^{3/2} - 1 \right) .
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la lunghezza dell'insieme A, invece, si tratta chiaramente del doppio della lunghezza della curva data dai punti Q_t, ossia della curva $\{\psi(t) : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ essendo

$$\psi(t) = (t, t\cos t, t\operatorname{sen} t)\,.$$

Dal momento che

$$|\psi'(t)| = \big|\big(1, \cos t - t\operatorname{sen} t,\ \operatorname{sen} t + t\cos t\big)\big| = \sqrt{2+t^2}\,,$$

si ha che la lunghezza cercata è

$$2\int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{2+t^2}\,dt = 4\int_{s=0}^{\sqrt{2}\pi} \sqrt{1+s^2}\,ds = 2\Big(\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}\pi) + \sqrt{2}\pi\sqrt{1+2\pi^2}\Big)\,.$$