Soluzioni della prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
12/1/2022

Esercizio 1. Per ogni $\varphi \in [0, \pi/2]$, possiamo parametrizzare la semicirconferenza tramite un angolo compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$. Si ha quindi

$$C_\varphi = \Big\{ \big(\cos\theta \cos\varphi, \sin\theta, \cos\theta \sin\varphi + \varphi \big) :\ \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \Big\}.$$

Una possibile espressione di Γ in forma parametrica è dunque

$$\Gamma = \Big\{ \big(\cos\theta \cos\varphi, \sin\theta, \cos\theta \sin\varphi + \varphi \big) :\ \theta \in [-\pi/2, \pi/2],\ \varphi \in [0, \pi/2] \Big\}.$$

Per quanto riguarda l'area di Γ, si può dunque scrivere

$$A = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} v(\theta, \varphi)\, d\theta\, d\varphi$$

con un opportuno $v(\theta, \varphi)$. Detta $f : [-\pi/2, \pi/2] \times [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da

$$f(\theta, \varphi) = \big(\cos\theta \cos\varphi, \sin\theta, \cos\theta \sin\varphi + \varphi \big),$$

si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \Big(-\sin\theta \cos\varphi, \cos\theta, -\sin\theta \sin\varphi \Big), \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \Big(-\cos\theta \sin\varphi, 0, \cos\theta \cos\varphi + 1 \Big),$$

e quindi

$$v(\theta, \varphi) = \Big| \Big(\cos^2\theta \cos\varphi + \cos\theta, \sin\theta \cos\theta + \sin\theta \cos\varphi, \cos^2\theta \sin\varphi \Big) \Big|.$$

Un semplice calcolo trigonometrico assicura allora che

$$|v(\theta, \varphi)|^2 = 2\cos\theta \cos\varphi + 2\cos^2\theta + \sin^2\theta \cos^2\varphi.$$

Si può quindi scrivere

$$A = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2\cos\theta \cos\varphi + 2\cos^2\theta + \sin^2\theta \cos^2\varphi}\, d\theta\, d\varphi.$$

Per quanto riguarda l'insieme Ω, la sua frontiera è data dall'unione tra Γ, il semicerchio

$$\big\{ (x, y, z) :\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ z = 0 \big\},$$

il rettangolo

$$\{0\} \times [-1, 1] \times [0, \pi/2],$$

ed il semicerchio

$$\big\{ (x, y, z) :\ x = 0,\ z \ge \pi/2,\ y^2 + (z - \pi/2)^2 \le 1 \big\}.$$

Il perimetro di Ω è quindi dato da

$$A + \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = A + 2\pi.$$

Esercizio 2. La funzione f è sicuramente continua in quanto somma, prodotto e composizione di funzioni continue (i polinomi ed il modulo). Dal momento che la funzione $t \mapsto |t|$ è anche derivabile fuori da 0, si ha che f è sicuramente differenziabile su $\mathbb{R}^2$ meno gli assi $\{x = 0\}$ ed $\{y = 0\}$.

Per quanto riguarda la differenziabilità di f sugli assi, possiamo osservare come per ogni punto (x, y) che non sia sugli assi si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pm\Big(y\left(x^2 + 2y^2 - 1\right) + 2x^2 y\Big), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \pm\Big(x\left(x^2 + 2y^2 - 1\right) + 4xy^2\Big),$$

dove il segno è il "+" nel primo e nel terzo quadrante (ossia dove $xy > 0$) e il "$-$" nel secondo e quarto quadrante (ossia dove $xy < 0$). Visto che le espressioni in parentesi sono polinomi, quindi continue, per il Teorema del Differenziale Totale possiamo dire che la funzione f è differenziabile nei punti degli assi in cui entrambe le espressioni in parentesi si annullano. D'altra parte, sempre per la continuità dei polinomi, nei punti degli assi in cui almeno una delle espressioni in parentesi non si annulla si ha un salto di una derivata parziale e dunque la non differenziabilità. Si ha dunque che nei cinque punti degli assi

$$(0, 0), \qquad (0, \sqrt{2}/2), \qquad (0, -\sqrt{2}/2), \qquad (1, 0), \qquad (-1, 0)$$

la f è differenziabile, ed in tutti gli altri punti degli assi non lo è.

Per ogni direzione $\theta \in [0, 2\pi]$, è immediato osservare che il limite

$$\lim_{t\to+\infty} f(t\cos\theta, t\sin\theta)$$

esista, ed in particolare tale limite vale $+\infty$ per tutte le direzioni eccetto le quattro che stanno sugli assi, ossia $\theta \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, per le quali il limite vale 0. Il limite di f all'infinito quindi non esiste.

Quanto detto sopra assicura che il sup della funzione è $+\infty$, e dunque non esistono punti di massimo globale. Per quanto riguarda il minimo globale, è opportuno osservare come, visto che $|xy|$ è sempre maggiore o uguale a 0, la funzione f è positiva al di fuori dell'ellisse $\{x^2 + 2y^2 = 1\}$ e negativa all'interno. Più precisamente, la funzione è nulla sul bordo dell'ellisse e negli assi, mentre all'interno e all'esterno dell'ellisse è *strettamente* negativa e *strettamente* positiva in tutti i punti che non siano sugli assi. Questo assicura che il minimo globale esista, visto che qualunque minimo globale all'interno dell'ellisse (che esiste perché f è continua sull'ellisse chiusa $\{x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ ed è strettamente negativo) è in effetti un minimo globale su tutto $\mathbb{R}^2$, visto che fuori la funzione è maggiore o uguale a 0.

Il ragionamento sul segno di f appena fatto assicura che tutti i punti sugli assi che siano strettamente fuori dall'ellisse, ossia tutti i punti $(x, 0)$ con $|x| > 1$ e tutti i punti $(0, y)$ con $|y| > \sqrt{2}/2$, sono punti di minimo locale, visto che su tali punti la funzione vale 0 e in un intorno è positiva. Analogamente, in tutti i punti sugli assi che sono strettamente dentro l'ellisse, cioè i punti $(x, 0)$ con $|x| < 1$ e $(0, y)$ con $|y| < \sqrt{2}/2$, sono di massimo locale. Per quanto riguarda i punti $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm\sqrt{2}/2)$, sono punti critici perché come visto sopra il gradiente si annulla, e sono senz'altro punti di sella, visto che ci sono punti con $f > 0$ e punti con $f < 0$ in un qualunque intorno.

Restano quindi solo da studiare i punti critici *che non siano sugli assi*, tra i quali vi deve essere in particolare il minimo globale di f. Visto che la funzione è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi, ossia $f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, per studiare i punti critici è sufficiente considerare quelli corrispondenti al quadrante $\{x > 0,\, y > 0\}$. Imporre che $\nabla f(x,y)$ sia nullo per un punto (x,y) contenuto nel primo quadrante equivale a chiedere che

$$y\left(x^2 + 2y^2 - 1\right) + 2x^2 y = x\left(x^2 + 2y^2 - 1\right) + 4xy^2 = 0\,,$$

che visto che x ed y non sono nulli si può riscrivere come

$$3x^2 + 2y^2 = x^2 + 6y^2 = 1\,.$$

L'unica soluzione (con (x,y) nel primo quadrante) di queste equazioni è

$$(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Per la simmetria già osservata, deduciamo che ci sono esattamente quattro punti critici fuori dagli assi, cioè i punti

$$\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right),$$

e sempre per simmetria devono essere punti critici tutti della stessa natura. Avendo già osservato che deve esistere un minimo globale, e che tale punto non è sugli assi, deduciamo quindi che i quattro punti appena trovati sono quattro minimi globali.