

Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
16/9/2021

Tempo a disposizione: 120 minuti.

E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile.

Esercizio 1 (10 punti). Si calcoli la lunghezza della curva in \mathbb{R}^3 data da $t \mapsto (t, e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t))$, con $0 \leq t \leq \ln 2$.

Esercizio 2 (10 punti). Si consideri l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 \leq \left(\frac{z}{1+z^2} \right)^2 \right\}.$$

- (i) Si calcoli il volume di Ω .
- (ii) Dato $K > 0$, si esprima il perimetro di $\Omega \cap \{0 \leq z \leq K\}$ come un integrale (senza necessariamente calcolare il suo valore).
- (iii) Si dica se Ω ha perimetro finito o meno.

Esercizio 3 (10 punti). Si definisca $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$f(x, y) = \frac{e^x + x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 2}.$$

- (i) Si dimostri che f non ammette massimo globale.
- (ii) Si trovino i limiti direzionali di f all'infinito, ossia i limiti del tipo $\lim_{t \rightarrow \infty} f(tv)$ con $|v| = 1$.
- (iii) Si dimostri che esiste un minimo globale per f .
- (iv) Si dica quanti sono i punti critici di f e si discuta la loro natura.