Prova scritta per il corso di Analisi Matematica 2
corso di laurea in Ingegneria Biomedica
Università di Pisa
12/1/2022

Tempo a disposizione: 90 minuti.
E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile.

`Nome:`
`Cognome:`
`Numero di matricola:`

Esercizio 1 (15 punti)**.** Per ogni $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, si chiami $\Pi_\varphi \in \mathbb{R}^3$ il semipiano definito come

$$\Pi_\varphi = \Big\{ (\alpha \cos\varphi, y, \alpha \sin\varphi + \varphi),\, \alpha \geq 0,\, y \in \mathbb{R} \Big\} ,$$

e sia $S_\varphi \subseteq \Pi_\varphi$ il segmento

$$S_\varphi = \{0\} \times [-1,1] \times \{\varphi\} .$$

Sia inoltre C_φ la semicirconferenza contenuta in Π_φ che abbia S_φ come diametro. Definiamo quindi la superficie $\Gamma = \cup_{0\leq\varphi\leq\pi/2} C_\varphi$.

(i) Si trovi un'espressione di Γ in forma parametrica.
(ii) Si esprima l'area di Γ come integrale, effettuando il calcolo fin dove si riesca.
(iii) Detta A l'area calcolata al punto precedente, e chiamato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ l'insieme contenuto nel quadrante aperto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\, z > 0\}$ la cui frontiera, nel quadrante aperto, coincide con Γ, si trovi il perimetro di Ω.

Esercizio 2 (15 punti)**.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = |xy| \left(x^2 + 2y^2 - 1 \right) .$$

(i) Si dica se la funzione f è continua e/o differenziabile.
(ii) Si studino i limiti direzionali di f all'infinito, e si dica se f ammette un limite all'infinito.
(iii) Si discuta l'esistenza di massimi e/o minimi globali per f.
(iv) Si trovino tutti i punti critici di f e si studi la loro natura.