Indice

Capitolo 1

Introduzione

Cominciamo con alcune osservazioni sparse, che ci aiuteranno a partire nella giusta direzione.

Esempio 1.1. *Supponiamo che* Ω *sia un aperto regolare in* $\mathbb{R}^N$*, e che* $\bar{u}$ *sia una funzione che minimizza il funzionale*

$$J(u) = \int_\Omega |Du|^2$$

nell'insieme

$$\Big\{ u \in \mathrm{C}^2(\bar{\Omega}) : \; u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \; \int_\Omega u^2 = 1 \Big\} .$$

Allora è facile vedere che $\bar{u}$ *sia un'autofunzione del Laplaciano con condizioni di Dirichlet al bordo.*

Questa osservazione è molto semplice. Si noti però che lavorare con le funzioni C^2 non è l'unica possibilità, in fondo per definire il funzionale J serve una sola derivata, e non per forza classica... Questo fa capire come scegliere il corretto spazio di funzioni sia molto utile.

In effetti l'esempio appena visto è un caso particolare del seguente risultato estremamente generale.

Lemma 1.2 (I moltiplicatori di Lagrange)**.** *Sia* X *uno spazio vettoriale, siano* $J, G : X \to \mathbb{R}$ *due funzionali continui e differenziabili, nel senso che per ogni* x, $y \in X$ *il limite*

$$J'_y(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(x + \varepsilon y) - J(x)}{\varepsilon}$$

esiste ed è una funzione lineare in y*, e lo stesso vale per* $G'_y(x)$*. Allora, se* $\bar{x}$ *minimizza* J *tra tutti gli elementi dell'insieme* $\big\{ x \in X : \; G(x) = 1 \big\}$*, deve esistere un numero* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$J'(\bar{x}) = \lambda G'(\bar{x}) .$$

Esercizio 1.3. *Si dica che equazione risolve una funzione $\bar{u}$ che minimizzi $\int_\Omega |Du|^2$ tra tutte le funzioni nello spazio*

$$\left\{ u \in \mathrm{C}^2(\bar{\Omega}) : u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \int_\Omega u^2 + u^m = 1 \right\},$$

essendo $m \in \mathbb{N}$.

Il "problema di base" nel Calcolo delle Variazioni è quello di minimizzare un funzionale del tipo

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx \tag{1.1}$$

in un opportuno spazio di funzioni. La funzione F in genere si dice *Lagrangiana.*

Esempio 1.4 (La legge di Fermat (o della rifrazione)). *Supponiamo che vi siano due mezzi, separati da un iperpiano, e che la velocità della luce sia v_1 in un mezzo e v_2 nell'altro. Si può allora studiare quale sia il percorso che fa la luce per congiungere due punti, uno all'interno di un mezzo e uno all'interno dell'altro. Si può scrivere in modo naturale il problema di minimizzazione come una lagrangiana, e si può facilmente trovare la ben nota legge dei seni.*

Il prossimo esempio ha avuto un'importante storia nella matematica.

Esempio 1.5 (La brachistocrona). *Dati due punti nello spazio, uno a quota maggiore dell'altro, qual è la curva che li connette che sia più rapida da percorrere, supponendo che vi sia perfetta conservazione dell'energia? Se supponiamo che i punti abbiano coordinate $(x_1, 0, z_1)$ e $(x_2, 0, z_2)$ con $z_1 \geq z_2$ e $x_1 < x_2$, e se scriviamo la traiettoria come $(x, u(x))$ per $x_1 \leq x \leq x_2$, per conservazione dell'energia (e ponendo per comodità l'accelerazione pari a $g = 1$) si ha che la velocità ad ascissa x è data da*

$$\frac{1}{2} v(x)^2 = z_1 - u(x)\,.$$

D'altra parte, il versore della velocità è pari a

$$\frac{(1, u'(x))}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}\,,$$

e quindi la componente orizzontale della velocità è data da

$$\omega(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} = \frac{\sqrt{2(z_1 - u(x))}}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}\,.$$

Risolvere il problema si riduce quindi a minimizzare

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{(z_1 - u(x))}}\, dx$$

tra tutte le funzioni $u \in \mathrm{C}^1([x_1, x_2])$ che verifichino $u(x_1) = z_1$ e $u(x_2) = z_2$.

Almeno per ora, non siamo in grado di calcolare esplicitamente la soluzione del problema della brachistocrona; nel prosieguo del corso vi riusciremo facilmente.

Concludiamo con un paio di esempi, che mostrano come le questioni della scelta dello spazio di funzioni e dell'esistenza non siano per forza così scontate.

Esercizio 1.6. *Tra tutte le funzioni* $u \in \mathrm{C}^1([0,1])$ *con* $u(0) = u(1) = 0$*, si cerchi di minimizzare*

$$\int_0^1 \left(1 - u'(x)^2\right)^2 dx \,,$$

oppure

$$\int_0^1 \left(1 - u'(x)^2\right)^2 + u(x)^2 \, dx \,.$$

Capitolo 2

Teoremi di tipo Eulero-Lagrange e campi estremali

2.1 Estremali deboli e formula di Eulero-Lagrange

Si consideri il funzionale tipo (1.1), in cui $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x, u, Du)$. Indicheremo sempre con x, z e p le tre variabili di F. Lo spazio ambiente è un insieme sufficientemente regolare $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$, inoltre $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ e $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mN} \to \mathbb{R}$. Si supponga che F ed u siano di classe C^2. Allora, per ogni funzione φ a valori in $\mathbb{R}^m$ di classe C^∞ fin sul bordo di Ω esiste la "derivata direzionale"

$$\delta\mathcal{F}(u, \varphi) := \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{F}(u + \varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

In questo corso, saremo interessati quasi sempre al problema in cui $m = N = 1$ e $\Omega = (0, 1)$.

Definizione 2.1 (Estremale debole)**.** *Siano F ed u di classe C^2. La funzione u è detta* estremale debole per $\mathcal{F}$ *se per ogni $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ si ha $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0$.*

E' praticamente ovvio osservare il seguente risultato.

Lemma 2.2. *Se F ed u sono di classe C^2 ed u è un minimo locale di $\mathcal{F}$ con dato al bordo fissato, allora è un estremale debole.*

In realtà si tratta chiaramente di una condizione necessaria ma non sufficiente, come mostra il prossimo esempio.

Esempio 2.3. *Si consideri il caso $m = N = 1$ con $\Omega = (0, 1)$, e sia $F(x, z, p) = |p|^\alpha p$, con un qualche $\alpha > 1$. E' allora immediato osservare che la funzione $u \equiv 0$ è un estremale debole ma non è un minimo, neppure locale, nemmeno per convergenza uniforme C^1.*

Si ha poi il seguente risultato, immediato nel caso di una funzione f continua, e semplice anche nel caso $f \in L^1(\Omega)$.

Lemma 2.4. *Sia $f \in L^1(\Omega)$ una funzione con la proprietà che $\int_\Omega f\varphi = 0$ per ogni $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$. Allora $f \equiv 0$.*

Possiamo adesso trovare la formula di Eulero-Lagrange.

Teorema 2.5 (Eulero-Lagrange)**.** *Sia $F \in \mathrm{C}^2(\Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{Nm})$, e sia $u \in \mathrm{C}^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ un estremale debole. Allora vale la formula*

$$\frac{d}{dx} F_p = F_z \,. \tag{EL}$$

E' importante capire bene il significato dell'equazione (EL), che si può scrivere in forma meno compatta come

$$\frac{d}{dx} F_p(x, u(x), Du(x)) = F_z(x, u(x), Du(x)) \,.$$

In particolare, la derivata in x del termine a sinistra non è una derivata parziale! Il termine a sinistra, quindi, che sarebbe più preciso indicare come $\mathrm{div}_x F_p(x, u, Du)$, scritto in componenti non è altro che

$$\left(\sum_{j=1}^N \frac{d}{dx_j} \, F_{p_j^i}\big(x, u(x), Du(x)\big) \right)_{i=1,\,2,\,\dots\,,\,m} .$$

Esempio 2.6. *Consideriamo il caso $F(x, z, p) = \frac{1}{2} M|p|^2 + V(z)$. Allora l'equazione di Eulero-Lagrange per una soluzione u non è altro che l'eqauzione della dinamica con un campo conservativo,*

$$Mu''(x) = \frac{\partial V}{\partial z} \, (u(x)) \,.$$

In effetti, la richiesta che u sia di classe C^2 è particolarmente scomoda, come si può vedere anche grazie al seguente esempio.

Esempio 2.7. *Consideriamo l'intervallo $[-1, 1]$ con il funzionale $F(x, z, p) = z^2(2x - p)^2$ e dati al bordo $u(-1) = 0$, $u(1) = 1$. E' evidente che l'unico minimo sia la funzione $u(x) = (x^+)^2$, che è una funzione C^1 ma non C^2.*

Per poter alleggerire le ipotesi della formula di Eulero-Lagrange, arrivando alla formula di Du Bois-Reymond, ci serve il seguente risultato, che in pratica è l'analogo del Lemma 2.4 con una derivata in più.

Lemma 2.8. *Sia $f \in L^1(\Omega)$ una funzione con la proprietà che, per ogni $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, valga*

$$\int_\Omega f(x) D\varphi(x)\, dx = 0 \in \mathbb{R}^N .$$

Allora, f è costante.

Per dimostrare questo lemma basta ricondursi al caso 1-dimensionale e lavorare con i punti di Lebesgue. La definizione dei punti di Lebesgue, ed il fatto che quasi ogni punto lo sia, sono studiati nella prossima sezione.

2.2 I punti di Lebesgue

In questa sezione mostriamo il ben noto Teorema dei punti di Lebesgue. Per farlo, ci servono le due seguenti definizioni standard.

Definizione 2.9. *Sia X uno spazio metrico, e sia μ una misura di Radon su X. Data una funzione $f \in L^1_{\mu,\mathrm{loc}}(X)$, un punto $x \in X$ si dice* punto di Lebesgue *se*

$$f(x) = \lim_{\rho \searrow 0} \frac{1}{\mu(B(x,\rho))} \int_{B(x,\rho)} f(y)\, d\mu(y) .$$

Definizione 2.10. *Sia (X,μ) uno spazio metrico con una misura di Radon. Lo spazio è detto* localmente doubling *se per ogni punto $x \in X$ esistono un intorno aperto $A \ni x$ in X ed una costante $K > 0$ tale che per ogni palla $B(z,2\rho)$ contenuta in A si abbia*

$$\mu\big(B(z,2\rho)\big) \leq K \mu\big(B(z,\rho)\big) .$$

Si ha quindi il seguente fatto fondamentale.

Teorema 2.11 (Quasi ogni punto è di Lebesgue). *Se (X,μ) è uno spazio di misura localmente doubling e $f \in L^1_{\mu,\mathrm{loc}}(X)$, allora μ-quasi ogni punto di x è un punto di Lebesgue.*

Per mostrare questo teorema, avremo bisogno del seguente lemma di ricoprimento.

Lemma 2.12 (Ricoprimento). *Sia X uno spazio metrico, e sia $\Omega \subseteq X$ un aperto totalmente limitato. Allora esistono numerabili palle aperte $B(x_i,\rho_i)$, tutte disgiunte e contenute in Ω, tali che*

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, 3\rho_i) .$$

Osservazione 2.13. *In effetti, il precedente lemma è valido anche con il seguente enunciato. Se X è uno spazio metrico, e $\Omega = \bigcup_{i\in I} B(x_i, \rho_i)$ è un'unione arbitraria di palle totalmente limitata, allora esiste una sottounione $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, \rho_n)$ fatta di* numerabili *palle* disgiunte *tale che*

$$\Omega \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, 5\rho_n)\,.$$

Dimostrazione (del Teorema 2.11). Ci si può subito ricondurre al caso in cui X sia compatto e doubling, e $f \in L^1_\mu(X)$. Fissiamo $\varepsilon \ll 1$. Essendo $f \in L^1_\mu$, esiste una successione $\{f_n\}$ di funzioni continue che convergono in L^1 ad f, ed a meno di passare ad una sottosuccessione la convergenza è anche puntuale quasi ovunque. Si definisca quindi

$$A_n^\varepsilon = \Big\{ x \in X : \exists\, n' \geq n,\, |f(x) - f_{n'}(x)| \geq \varepsilon \Big\}\,,$$

e si noti che la convergenza puntuale quasi ovunque assicura che $\mu(A_n^\varepsilon) \to 0$ quando $n \to \infty$. Si può allora prendere $\overline{n}$, che dipende da ε, in modo che

$$\mu\big(A^\varepsilon_{\overline{n}}\big) \leq \varepsilon^2\,, \qquad\qquad \int_\Omega \big|f - f_{\overline{n}}\big| \leq \varepsilon^2\,. \tag{2.1}$$

Definiamo infine

$$C_\varepsilon := \Big\{ x \in X : \limsup_{\rho\to 0} \fint_{B_{(x,\rho)}} |f - f_{\overline{n}}| > \varepsilon \Big\}\,.$$

Per ogni $x \notin A^\varepsilon_{\overline{n}}$ si ha allora

$$\begin{aligned}
&\fint_{B_{(x,\rho)}} |f(y) - f(x)|\, dy \\
&\qquad \leq \fint_{B_{(x,\rho)}} |f(y) - f_{\overline{n}}(y)|\, dy + \fint_{B_{(x,\rho)}} |f_{\overline{n}}(y) - f_{\overline{n}}(x)|\, dy + \fint_{B_{(x,\rho)}} |f_{\overline{n}}(x) - f(x)|\, dy \\
&\qquad \leq \fint_{B_{(x,\rho)}} |f(y) - f_{\overline{n}}(y)|\, dy + \fint_{B_{(x,\rho)}} |f_{\overline{n}}(y) - f_{\overline{n}}(x)|\, dy + \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Visto che $f_{\overline{n}}$ è una funzione continua, il secondo integrale nell'ultimo termine tende a 0 quando $\rho \to 0$, per cui se $x \notin C_\varepsilon \cup A^\varepsilon_{\overline{n}}$ si deduce

$$\limsup_{\rho\to 0} \fint_{B_{(x,\rho)}} |f(y) - f(x)|\, dy < 2\varepsilon\,.$$

In altre parole, i punti che non sono di Lebesgue devono appartenere a $C_\varepsilon \cup A^\varepsilon_{\overline{n}}$ per qualche $\varepsilon > 0$. Visto che tali insiemi sono inscatolati, per concludere la tesi bisogna solo mostrare che $\mu\big(C_\varepsilon \cup A^\varepsilon_{\overline{n}}\big) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$ (si tenga a mente che $\overline{n}$ dipende da ε!). Visto che (2.1) già assicura che $\mu(A^\varepsilon_{\overline{n}})$ tende a 0, per concludere bisogna mostrare che $\mu(C_\varepsilon) \to 0$.

Per ogni $x \in C_\varepsilon$, sia $\rho(x) > 0$ un qualunque numero positivo tale che

$$\fint_{B(x,\rho(x))} |f - f_{\overline{n}}| > \varepsilon$$

Definiamo finalmente $\Omega = \cup_{x \in C_\varepsilon} B(x, \rho(x))$, che è un aperto totalmente limitato visto che stiamo supponendo X compatto. Per il Lemma 2.12, ricordando anche l'Osservazione 2.13, troviamo numerabili punti $x_n \in C_\varepsilon$ tali che le palle $B(x_n, \rho(x_n))$ sono disgunte, ma l'unione delle palle $B(x_n, 5\rho(x_n))$ ricopre tutto Ω. Ricordando la (2.1) si ha quindi

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\Big(B(x_n, \rho(x_n))\Big) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\int_{B(x_n,\rho(x_n))} \big|f - f_{\overline{n}}\big|}{\fint_{B(x_n,\rho(x_n))} \big|f - f_{\overline{n}}\big|} < \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B(x_n,\rho(x_n))} \big|f - f_{\overline{n}}\big| \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n,\rho(x_n))} \big|f - f_{\overline{n}}\big| < \varepsilon\,,\end{aligned}$$

e quindi, chiamando K la costante di doubling di X, si ottiene

$$\begin{aligned}\mu(C_\varepsilon) \leq \mu(\Omega) \leq \mu\Big(\bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, 5\rho(x_n))\Big) &\leq \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \mu\big(B(x_n, 5\rho(x_n))\big) \\ \leq K^3 \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \mu\big(B(x_n, \rho(x_n))\big) < K^3\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Si è quindi mostrato che $\mu(C_\varepsilon) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$, e la tesi è conclusa. □

2.3 Formula di Du Bois-Reymond

Così come il Lemma 2.4 ci ha permesso di ottenere la formula di Eulero-Lagrange, il Lemma 2.8 ci permette la seguente generalizzazione.

Teorema 2.14 (Du Bois-Reymond). *Sia $F \in \mathrm{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{Nm})$, e sia $u \in \mathrm{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ un estremale debole. Allora, se $N = m = 1$ e $\Omega = (a, b)$ vale la formula*

$$F_p\big(x, u(x), u'(x)\big) = C + \int_a^x F_z\big(y, u(y), u'(y)\big)\, dy \qquad \text{(DBR)}$$

per un'opportuna costante $C \in \mathbb{R}$. Se invece $m > 1$ ed Ω è convesso, esiste una matrice $M \in R^{m\times N}$ tale che

$$F_{p^i_j}(x, u, Du) = M_{ij} + \frac{1}{N} \int_{S_j} F_{z_i}\big(y, u(y), Du(y)\big)\, dy\,,$$

essendo S_j il segmento ottenuto da tutti i punti $y = (x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_N)$ con $t < x_j$ che appartengono ad Ω.

Si noti che la formula (DBR) non è altro che la forma integrale della formula (EL), e per essere scritta non ha bisogno di più che $F \in \mathrm{C}^1$. Si noti anche che, se vale la (DBR), il termine a destra è una funzione di classe C^1 della variabile x, dunque $x \mapsto F_p(x, u(x), u'(x))$ è di classe C^1, e quindi possiamo ancora scrivere

$$\frac{d}{dx} F_p(x, u(x), u'(x)) = F_z(x, u(x), u'(x)),$$

ma se F ed u non sono di classe C^2 allora il termine a sinistra non si può scrivere come

$$F_{px} + F_{pz}\, u' + F_{pp}\, u''.$$

Si osservi poi che, nel caso in cui si abbia un minimo *non vincolato*, allora oltre alla validità della formula (EL) o (DBR) si ottiene un'informazione aggiuntiva. Più precisamente, vale il seguente risultato.

Proposizione 2.15. *Sia $F \in \mathrm{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{Nm})$, e sia $u \in \mathrm{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ tale che si abbia $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$. Allora per ogni $1 \le i \le m$ si ha*

$$F_{p^i}(x, u(x), Du(x)) \cdot \nu(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \partial\Omega,$$

dove come al solito $\nu(x)$ indica la normale uscente a $\partial\Omega$ in x.

Esempio 2.16. *I minimi regolari dei funzionali*

$$\mathcal{F}_1(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}\,|Du|^2 - fu\,, \qquad\qquad \mathcal{F}_2(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}\,|Du|^2 - \frac{1}{2}(u-g)^2$$

risolvono le equazioni

$$-\Delta u = f\,, \qquad\qquad -\Delta u = u - g\,,$$

grazie alla formula di Eulero-Lagrange. In entrambi i casi, inoltre, se si tratta di minimi non vincolati*, si ottiene che $Du \cdot \nu = 0$ su $\partial\Omega$, ossia*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad \forall\, x \in \partial\Omega\,.$$

Abbiamo così ritrovato la condizione al bordo di tipo Neumann, e si comprende come mai sia detta "condizione naturale", per distinguerla dalla "condizione essenziale", ossia la condizione di Dirichlet.

Possiamo trovare un'altra condizione necessaria per la minimalità locale, nel caso $N = 1$, come segue.

Lemma 2.17. *Sia $\Omega = (a, b)$, sia $F \in \mathrm{C}^1$, e sia $u \in \mathrm{C}^1$ un minimo locale di $\mathcal{F}$ rispetto alla norma del sup. Allora la quantità*

$$\tau(x) = u'(x)F_p(x, u(x), u'(x)) - F(x, u(x), u'(x)) + \int_{t=a}^{x} F_x(y, u(y), u'(y))\, dy$$

è costante.

La dimostrazione di questo lemma è interessante in quanto segue un'idea diversa, ossia non di fare una variazione nella u, ma un cambio di variabile.

Osservazione 2.18. *Come al solito, la condizione trovata è necessaria ma non sufficiente, ad esempio τ è costante per ogni funzione u costante, che ovviamente non ha alcun motivo di essere minimo locale.*

Esempio 2.19. *Consideriamo nuovamente l'energia $F(x, z, p) = \frac{1}{2}\, m|p|^2 + V(z)$. Il Lemma 2.17 ci assicura che per un minimo locale sia costante $\frac{1}{2}\, m|p|^2 - V(z)$, abbiamo cioè ritrovato la conservazione dell'energia.*

2.4 Condizione di Legendre e criterio astratto

Consideriamo il caso $N = 1$, e diamo la seguente definizione.

Definizione 2.20 (Criterio di Legendre)**.** *Data $F \in \mathrm{C}^2((a, b), \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ e data una funzione $u \in \mathrm{C}^1((a, b))$, si dice che è soddisfatto il* criterio di Legendre *se $D^2_p F(x, u, u')$ è semidefinito positivo, ossia per ogni $x \in (a, b)$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^m$ si abbia*

$$\sum_{i,j=1}^{m} F_{p_i p_j}(x, u(x), u'(x))\xi_i \xi_j \geq 0\,.$$

Proposizione 2.21. *Se $F \in \mathrm{C}^2$ e $u \in \mathrm{C}^1$ è un minimo locale di $\mathcal{F}$, allora vale la condizione di Legendre.*

Vediamo adesso il seguente criterio.

Lemma 2.22 (Criterio astratto)**.** *Se due funzionali $\mathcal{F}, \mathcal{M} : X \to \mathbb{R}$ ed un elemento $\bar{u} \in X$ verificano le condizioni*

$$\mathcal{M}(u) \leq \mathcal{F}(u) \quad \forall\, u \in X, \qquad \mathcal{M}(\bar{u}) \leq \mathcal{M}(u) \quad \forall\, u \in X, \qquad \mathcal{M}(\bar{u}) = \mathcal{F}(\bar{u})\,,$$

allora $\bar{u}$ è un minimo per $\mathcal{F}$.

Per quanto questo fatto sia assolutamente ovvio, lo utilizzeremo spesso. Ricordiamo anche il *metodo diretto.*

Lemma 2.23 (Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni)**.** *Sia X uno spazio topologico, e sia $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:*

i) I sottolivelli di $\mathcal{F}$ sono sequenzialmente relativamente compatti;

ii) Il funzionale $\mathcal{F}$ è sequenzialmente semicontinuo inferiormente.

Allora $\mathcal{F}$ ammette un minimo.

Anche questo è un criterio di per sé completamente ovvio, tuttavia si tratta di una tecnica di primaria importanza per il Calcolo delle Variazioni. In particolare, si noti come il fatto che un funzionale $\mathcal{F}$ definito su un insieme X ammetta o meno un minimo non ha niente a che vedere con la topologia su X. Si può quindi dotare X di una qualsiasi topologia, purché sia tale che le due condizioni siano verificate. Si noti anche che una topologia più forte (cioè con più aperti) rende più facile la seconda condizione e più difficile la prima, mentre una topologia più debole rende più facile la prima e più difficile la seconda. In particolare dotando X della topologia discreta, quella in cui qualunque sottoinsieme di X è aperto, che è la più forte di tutte, si ha che qualsiasi funzionale $\mathcal{F}$ è continuo, ma i sottolivelli di $\mathcal{F}$ possono essere compatti solo se X è numerabile. Al contrario, dotando X della topologia indiscreta, la più debole di tutte, quella in cui gli unici aperti in X sono il vuoto ed X stesso, qualsiasi insieme è relativamente compatto, ma gli unici funzionali sequenzialmente semicontinui inferiormente sono quelli costanti!