

Primo compitino del corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
10/11/2018

(Seconda parte)

Tempo a disposizione: 120 minuti.

E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile.

Nome:

Cognome:

Numero di matricola:

Acconsento che il voto finale venga pubblicato sulla pagina web del docente (solo per i voti pari almeno a 15/30, e con il numero di matricola al posto del nome):

sì no

Esercizio 1 (10 punti). Si definisca la funzione $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come $p(x) = 0$ per tutti gli $x < 0$, e $p(x) = x$ per tutti gli $x \geq 0$. Sia inoltre $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = e^{\frac{x}{1+p(x)}}.$$

- Si dimostri che p è continua, si dica in quali punti è derivabile e si calcoli la derivata $p'(x)$ dove essa è definita.
- Si dimostri che f è continua, si dica in quali punti è derivabile e si calcoli la derivata $f'(x)$ dove essa è definita.
- Si dimostri che f è limitata, e si trovino tutti gli eventuali punti di massimo e minimo locale o globale.
- Per ogni numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$, si dica se il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(f(x) - \alpha)$ esiste, ed in caso affermativo calcolarlo.
- Per ogni numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$, si dica se il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(f(x) - \alpha)$ esiste, ed in caso affermativo calcolarlo.

Esercizio 2 (10 punti). Per ogni $n \in \mathbb{N}$, studiare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6 \operatorname{sen}(\cos x - 1) + 3x^2 + \cos(\operatorname{sen}(x^2/\sqrt{2})) - 1}{x^n}.$$

Esercizio 3 (10 punti). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - x^2.$$

- Si dimostri che f è continua e derivabile su tutto \mathbb{R} , e si discutano $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Si dimostri che f ammette almeno un punto di massimo globale, e ogni tale punto è positivo.
- Si dica quanti punti di massimo e di minimo locale e globale ammette f .