Proprietà di riscalamento e dimensione

Emanuele Paolini

18 novembre 2016

Le proprietà di riscalamento delle misure sono un concetto molto semplice che però spesso viene ignorato nei percorsi scolastici. In queste note tenteremo di mettere in evidenza questo strumento, proponendo alcuni problemi a cui può essere applicato. In particolare vedremo una interessante dimostrazione del teorema di Pitagora e faremo una digressione nelle dimensioni frazionarie.

Problema 1. *Una normale bottiglia di vino ha una capacità di* $3/4$ *di litro. Una bottiglia di tipo* Jéroboam *contiene invece* 3 *litri. Quanto è il rapporto tra le altezze delle due bottiglie?*

Questo problema è molto semplice se affrontato con considerazioni dimensionali. La risoluzione non dipende dalla forma della bottiglia. L'unica informazione (che viene sottointesa) è il fatto che i diversi formati di bottiglia differiscono per una *similitudine*.

1 Similitudine

Una *similitudine* di fattore q è una particolare trasformazione geometrica che ha la proprietà di modificare ogni lunghezza moltiplicandola per lo stesso fattore q. Se σ è una similitudine, e P, Q sono due punti qualunque, si avrà quindi:

$$d(\sigma(P), \sigma(Q)) = q \cdot d(P, Q)$$

dove $d(P, Q)$ denota la distanza tra i punti P e Q e $d(\sigma(P), \sigma(Q))$ è la distanza dei punti immagine di P e Q dopo aver applicato la similitudine σ.

Le similitudini mantengono gli angoli e i rapporti tra le lunghezze dei segmenti. Di conseguenza si dice che le similitudini mantengono la forma.

I diversi formati di bottiglie, differiscono per la dimensione ma hanno tutti la stessa forma. Il Problema 1 ci chiede quindi di determinare il rapporto di similitudine tra due oggetti, conoscendone il volume.

Proviamo ora a considerare un problema apparentemente più semplice del Problema 1.

Problema 2. *Le patatine* tuberine *vengono normalmente confezionate in un cilindro di altezza 18cm e diametro 9cm. Una confezione contiene 50g di patatine. Se le patatine venissero confezionate in un cilindro di dimensioni doppie, quanti grammi di patatine ci aspetteremmo di trovare?*

È sensato supporre che il peso delle patatine sia proporzionale al volume occupato. Sarà quindi sufficiente determinare il rapporto tra i volumi dei due cilindri per ottenere il rapporto tra i pesi.

Sappiamo che il volume v di un cilindro di diametro d e altezza h è dato dalla formula:

$$v = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h.$$

Come varia il volume se moltiplichiamo le misure del cilindro per uno stesso coefficiente q? Poniamo $H = qh$, $D = qd$. Si otterrà allora

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{\pi}{4} D^2 H}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = \frac{\frac{\pi}{4} (qd)^2 (qh)}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = q^3. \tag{1}$$

Abbiamo quindi osservato che una similitudine di rapporto q modifica il volume dei cilindri di un rapporto q^3. Nel Problema 2 il rapporto di riscalamento è $q = 2$ e dunque possiamo affermare che il cilindro di dimensioni doppie avrà un volume pari a $2^3 = 8$ volte il volume del cilindro piccolo. Possiamo quindi aspettarci che anche il peso del suo contenuto venga moltiplicato per 8 e quindi sia pari a $8 \cdot 50g = 400g$.

Nell'equazione (1) abbiamo osservato come il cofficiente $\pi/4$ nella formula del calcolo del volume si elide quando facciamo il rapporto tra volumi di solidi simili. Questo ci fa intuire che il coefficiente q^3 di riscalamento del volume non dipende dalla forma del solido. In effetti se facciamo lo stesso calcolo per un cubo $v = \ell^3$, un parallelepipedo $v = abc$ o per una sfera $v = \frac{4}{3}\pi r^3$, otterremo sempre lo stesso risultato:

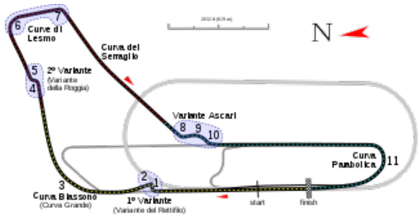
$$\frac{(q\ell)^3}{\ell^3} = \frac{q^3\ell^3}{\ell^3} = q^3, \qquad \frac{(qa)(qb)(qc)}{abc} = q^3, \qquad \frac{\frac{4}{3}(qr)^3}{\frac{4}{3}r^3} = q^3.$$

Possiamo convincerci che qualunque sia la forma di un solido, un riscalamento di fattore q determina un riscalamento del volume di un fattore q^3. Se lo volessimo dimostrare dovremmo però ricordarci come si definisce il volume di un solido qualunque. Quello che si fa è approssimare il solido tramite piccoli cubetti di lato ℓ. Se il solido si ricopre approssimativamente con N cubetti di lato ℓ, il suo volume sarà circa $v = N\ell^3$. Se il solido viene riscalato di un fattore q, lo si potrà approssimare con N cubetti di lato $q\ell$. Dunque il suo volume sarà circa $V = N(q\ell)^3 = q^3 N\ell^3 = q^3 v$, come avevamo intuito.

Queste considerazioni ci permettono di risolvere il Problema 1 che ci chiedeva qual è il rapporto tra le altezze della bottiglia Jéroboam da 3 litri e la normale bottiglia da 0,75 litri. Il rapporto tra le altezze è pari al fattore q di riscalamento. Visto che il rapporto tra i volumi è $3/(3/4) = 4 = q^3$ si trova $q = \sqrt[3]{4} \approx 1,59$.

2 Dimensione di una misura

L'esponente 3 nel fattore q^3 di riscalamento del volume identifica la dimensione della misura di volume. Diremo che il volume V è una misura di dimensione



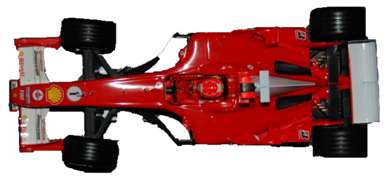


Figura 1: La mappa di un circuito e una macchinina sono esempi di oggetti riscalati. (figura di Will Pitenger e foto di Premnath Kudva, licenze Creative Commons)

3 in quanto se un qualunque solido X viene riscalato di un fattore q si ha $V(qX) = q^3 V(X)$ (dove abbiamo indicato con $V(X)$ il volume del solido X e abbiamo denotato con qX il riscalamento di X di un fattore q). Similmente l'area è una misura di dimensione 2 in quanto riscalando una superficie di un fattore q la sua area viene moltiplicata per un fattore q^2. La lunghezza è invece una misura di dimensione 1 in quanto se una curva viene riscalata di un fattore q la sua lunghezza viene moltiplicata per $q = q^1$.

Una *misura* è una funzione m che associa ad ogni figura geometrica F un numero $m(F)$. Senza entrare in dettagli tecnici, l'unica proprietà veramente rilevante di una misura è la *additività* ovvero la proprietà $m(F \cup G) = m(F) + m(G)$ quando F e G sono figure che non si sovrappongono. Tutte le misure che stiamo considerando sono inoltre invarianti per isometria, cioè $m(F) = m(F')$ se F' è congruente a F.

In generale una *misura* m si dice avere dimensione d se per ogni figura F si ha

$$m(qF) = q^d m(F).$$

Abbiamo finora osservato che la lunghezza è una misura 1-dimensionale, l'area è 2-dimensionale e il volume è 3-dimensionale. Possiamo sfruttare queste semplici informazioni nei seguenti problemi.

Problema 3. *Daniele ha disegnato il circuito di Monza in scala 1:1000 sul pavimento della terrazza. Sapendo che il circuito reale è lungo* $5793\,m$*, quanto sarà lungo il circuito disegnato da Daniele?*

Contando le piastrelle Daniele ha determinato che l'area racchiusa dal circuito in scala è circa $6,5\,m^2$*. Quanti metri quadri racchiude il vero circuito?*

Le macchinine che Daniele usa per giocare sono invece in scala $1:50$*. Se per dipingere la macchinina Daniele utilizza 1 tubetto di vernice rossa, quanti tubetti gli sarebbero necessari per dipingere la macchina vera?*

Risolviamo i quesiti del Problema 3. Il circuito disegnato da Daniele è ottenuto, da quello reale, per mezzo di una similitudine di fattore $q = 1/1000$. La lunghezza della pista è una misura 1-dimensionale, e quindi riscala dello stesso fattore q della similitudine. Dunque una curva di lunghezza $5793m$, riscalata, risulterà di lunghezza $q \cdot 5793m = 5,793m$. L'area è invece una misura

2-dimensionale e dunque l'area racchiusa dal circuito in scala è pari a q^2 volte l'area reale. Dunque l'area reale si ottiene moltiplicando per $1/q^2 = 1.000.000$ e risulta quindi pari a $6,5$ milioni di metri quadri (ovvero $6,5$ chilometri quadri). Per quanto riguarda la vernice utilizzata per dipingere la macchinina, possiamo assumere (non avendo maggiori informazioni a disposizione) che questa sia proporzionale all'area della carrozzeria della macchinina. E dunque, come l'area, sarà una misura 2-dimensionale. In questo caso il fattore di scala è $q = 1/50$ e dunque dividere per q^2 significa moltiplicare per $50^2 = 2500$. Stimiamo quindi che sarebbero necessari 2500 tubetti di vernice per dipingere la vettura reale.

Problema 4. *Osserviamo che i fogli di formato A4 (quelli usualmente utilizzati nelle macchine fotocopiatrici o nei quadernoni) hanno come forma un rettangolo che se diviso a metà lungo il lato più lungo dà origine a due fogli di formato A5 (quelli usualmente utilizzati nei quaderni piccoli) che hanno le stesse proporzioni del foglio iniziale. Qual è il rapporto dei due lati di un foglio A4?*

Sapendo che il formato A4 è a sua volta la metà dell'A3, l'A3 metà dell'A2, l'A2 metà dell'A1, l'A1 la metà dell'A0 e sapendo che il foglio di formato A0 ha un'area di 1 metro quadro, calcolare le lunghezze dei due lati di un foglio di formato A4.

Il foglio A4 ha area doppia del foglio A5. Se q è il rapporto di similitudine tra i due formati, essendo l'area una misura 2-dimensionale, si ha dunque $q^2 = 2$ da cui $q = \sqrt{2}$. Significa quindi che il rapporto tra i lati lunghi dei due formati è $\sqrt{2}$, ma il lato lungo del foglio A5 è uguale al lato corto del foglio A4 dunque il rapporto tra i due lati del foglio (sia A4 che, di conseguenza, A5) è $\sqrt{2}$.

Ad ogni suddivisione del foglio A0 l'area si dimezza, quindi il formato A4 ha una area pari a $1/2^4 = 1/16$ dell'area del formato A0 cioè $1/16$ di metro quadro. Chiamata x la lunghezza del lato corto, il lato lungo è $\sqrt{2}x$ (per quanto visto prima) e dunque l'area è $1/16\, m^2 = \sqrt{2}x^2$ da cui si ricava la lunghezza del lato corto

$$x = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}}}\, m = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}}\, m \approx 21,02\, cm$$

e di conseguenza il lato lungo

$$\sqrt{2} \cdot x \approx 29,73\, cm.$$

3 misure 0-dimensionali

Finora ci siamo occupati solamente delle misure di dimensione 1, 2 e 3. Vivendo in uno spazio 3-dimensionale queste sono le dimensioni su cui possiamo avere una diretta esperienza.

Dal punto di visto matematico non c'è però una limitazione fisica. Ha perfettamente senso definire e utilizzare misure di dimensione maggiore alla terza. Non vogliamo qui entrare in questo ambito che sarebbe affascinante, ma ci porterebbe molto lontano dagli altri concetti su cui intendiamo concentrarci.

Possiamo però dedicarci per un attimo all'altro estremo dello spettro: quali sono le misure di dimensione 0? La dimensione 0 è quasi banale, ma può essere utile osservare come abbia perfettamente senso e rientri nel contesto generale che stiamo descrivendo.

Problema 5. *La macchinina di formula uno di Daniele è in scala* $1 : 50$. *Sapendo che la macchinina vera ha quattro ruote, quante ruote ha la macchinina in scala?*

Il concetto, ovvio, che vogliamo mettere in evidenza è il fatto che ci siano delle misure che sono invarianti per riscalamento. Una di queste è il *numero* ovvero la misura che *conta* gli elementi di una figura. Questa risulta essere una misura 0-dimensionale, in quanto il numero di elementi di una figura riscalata di un fattore q viene moltiplicato per $q^0 = 1$ cioè resta invariato.

4 La dimostrazione del teorema di Pitagora

Al matematico ungherese Paul Erdős piaceva immaginare ci fosse un libro "divino" in cui tutti i teoremi matematici venissero dimostrati con procedimenti eleganti e sintetici. La proprietà di riscalamento dell'area ci permette di proporre una dimostrazione, essenziale e sintetica, del teorema di Pitagora.

Dobbiamo prima capire l'essenza dell'enunciato del teorema. Quando si afferma che l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti, non è veramente importante che la figura geometrica scelta sia un quadrato. Se ad esempio invece di un quadrato usassimo un pentagono regolare, avremmo comunque che l'area del pentagono costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei pentagoni costruiti sui cateti in quanto l'area del pentagono è proporzionale al quadrato del lato, essendo l'area una misura 2-dimensionale (Figura 2).

Dunque il teorema di Pitagora è equivalente ad affermare che una volta scelta una figura qualunque, se questa viene riscalata in proporzione alla lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, la sua area risulterà uguale alla somma delle aree delle figure riscalate in proporzione della lunghezza dei cateti. Se il teorema vale per una certa forma fissata, allora varrà per qualunque forma e in particolare per il quadrato.

Per dimostrare il teorema è quindi sufficiente scegliere una forma opportuna... quella che scegliamo è il triangolo stesso!

Se ABC è il triangolo con un angolo retto in C, suddividiamo il triangolo in due parti tracciando l'altezza CH rispetto all'ipotenusa. I triangoli ACH e BCH sono simili al triangolo ABC perché sono rettangoli in H e condividono un angolo in A o in B. Tali triangoli sono quindi simili tra loro e ognuno di essi ha come ipotenusa uno dei tre lati del triangolo iniziale ABC. E' d'altronde ovvio che l'area del triangolo ABC è uguale alla somma delle aree di ACH e BCH e dunque il teorema è dimostrato.

Possiamo ripetere il ragionamento in maniera più formale. Se chiamiamo a, b le lunghezze dei cateti e c la lunghezza dell'ipotenusa possiamo osservare che il

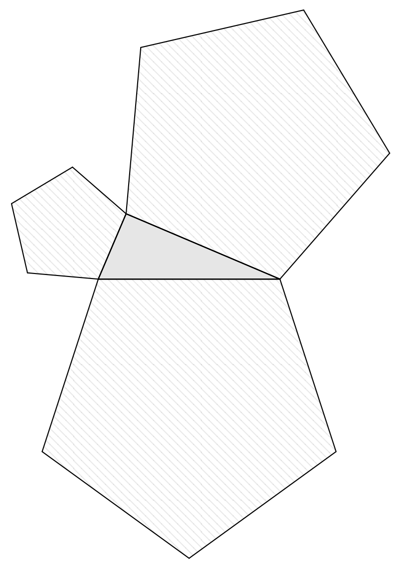


Figura 2: L'area del pentagono costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei pentagoni costruiti sui cateti.

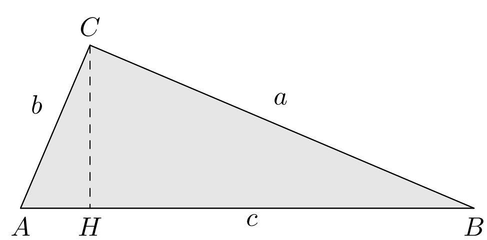


Figura 3: La dimostrazione del teorema di Pitagora può essere fatta semplicemente tracciando l'altezza rispetto all'ipotenusa.

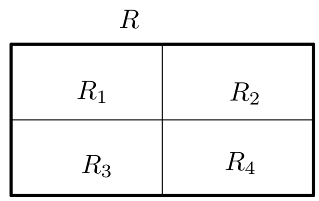


Figura 4: Un rettangolo può essere suddiviso in quattro rettangoli ognuno dei quali è una copia dell'originale riscalato di un fattore 1/2.

triangolo BCH si ottiene riscalando il triangolo ABC di un fattore a/c mentre il triangolo ACH si ottiene sempre da ABC ma con un fattore di riscalamento pari a b/c. Chiamata $\mathcal{A}$ l'area del triangolo ABC si ha che (visto che l'area è una misura 2-dimensionale) l'area di ACH è pari a $(a/c)^2\mathcal{A}$ e l'area di BCH è pari a $(b/c)^2\mathcal{A}$, dunque si ottiene

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 \mathcal{A} + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

da cui, semplificando $\mathcal{A}$, e moltiplicando ambo i membri per c^2 si ottiene

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

5 Dimensioni frazionarie: i *frattali*

Cerchiamo di determinare ora un metodo per definire la dimensione di una figura geometrica.

Se consideriamo un rettangolo R osserviamo che R può essere suddiviso in quattro rettangoli R_1, R_2, R_3, R_4 simili a R con un fattore di scala $q = 1/2$. Se m è una generica misura d-dimensionale, cioè una misura che soddisfa la relazione $m(qA) = q^d m(A)$, si avrà allora

$$m(R) = m(R_1) + m(R_2) + m(R_3) + m(R_4) = 4m(R/2) = \frac{4}{2^d} m(R)$$

(con $R/2$ si intende il rettangolo che si ottiene riscalando R di un fattore $1/2$). Questa relazione risulta banalmente vera se $m(R) = 0$ oppure se $m(R) = \infty$. Ad esempio se $d = 3$ la misura m sarebbe il volume e si avrebbe chiaramente $m(R) = 0$ (un rettangolo è assimilabile ad un parallelepipedo di altezza zero, quindi di volume zero). Viceversa se scegliessimo $d = 1$ la misura m sarebbe la lunghezza e si avrebbe $m(R) = \infty$ (un rettangolo è assimilabile ad una unione infinita di segmenti, quindi deve avere lunghezza infinita). Se però andiamo

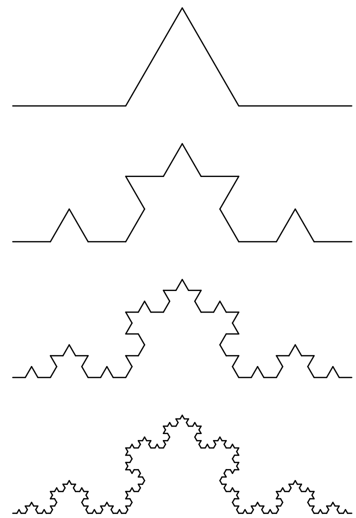


Figura 5: Le prime quattro iterazioni nella costruzione della curva di Koch.

a cercare un d per il quale si abbia $m(R) \neq 0$ e $m(R) \neq \infty$, allora possiamo dividere ambo i membri di questa uguaglianza per $m(R)$ ottenendo:

$$1 = \frac{4}{2^d}$$

da cui $2^d = 4$ ovvero $d = \log_2 4 = 2$. Dunque $d = 2$ è l'unica dimensione per la quale il rettangolo può avere una misura finita e non nulla.

Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto suddividendo il rettangolo in 9 rettangoli ognuno dei quali riscalato di un fattore $1/3$.

Proviamo a ripetere l'esperimento con un cubo C. In questo caso il cubo può essere suddiviso in 8 cubetti riscalati di un fattore $1/2$. Si otterrà dunque

$$m(C) = 8m(C/2) = \frac{8}{2^d} m(C)$$

da cui, dividendo per $m(C)$ si ottiene $2^d = 8$ e quindi $d = 3$ come ci saremmo aspettati.

Questo ragionamento non può essere fatto con qualunque figura (almeno non così facilmente). L'importante proprietà che stiamo sfruttando è che queste figure hanno la caratteristica di poter essere suddivise in un certo numero di copie riscalate di sé stesse. Questa proprietà si chiama *autosimilarità* ed è soddisfatta da altre figure molto interessanti: i frattali autosimilari.

Consideriamo ad esempio la *curva di Koch*. Tale curva si ottiene partendo da un segmento (diciamo di lunghezza unitaria). Il segmento viene suddiviso in tre parti, si rimuove la parte centrale e la si sostituisce con i due lati del triangolo equilatero la cui base è il segmento rimosso. Quello che si ottiene è una curva spezzata formata da quattro segmenti di lunghezza 1/3. Su ognuno di questi quattro segmenti si può ripetere la stessa operazione: si suddivide in 3 parti, si rimuove la parte centrale e la si sostituisce con due nuovi segmenti di lunghezza 1/9. Questo procedimento può essere ripetuto *all'infinito* fino ad ottenere una figura *frattale* chiamata appunto curva di Koch[1].

Questa figura è *autosimilare* in quanto l'intera figura K è unione di 4 pezzi, ognuno dei quali è una perfetta copia dell'originale, riscalata di un fattore 1/3. Possiamo quindi valutare la dimensione di questo oggetto, come abbiamo fatto con il rettangolo e il cubo. Si ha infatti:

$$m(K) = 4 \cdot m(K/3) = \frac{4}{3^d} \cdot m(K)$$

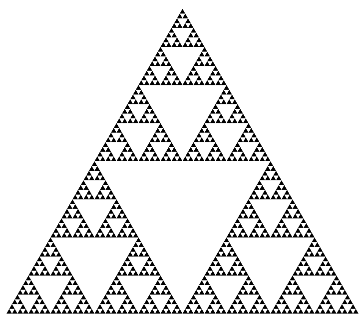
da cui, supponendo $0 < m(K) < \infty$, si ottiene

$$1 = \frac{4}{3^d}$$

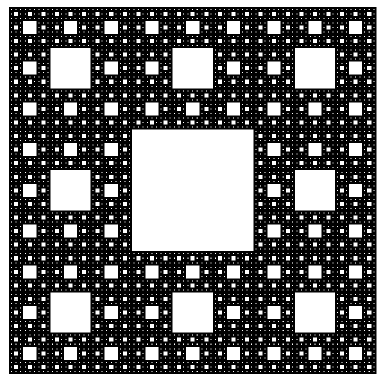
e quindi $d = \log_3 4 \approx 1.26$. Quello che abbiamo trovato è dunque una figura di dimensione frazionaria, intermedia tra 1 e 2. Si può in effetti verificare che la curva ottenuta ha lunghezza infinita (si provi, per esercizio, ad esprimere la lunghezza della n-esima iterata nella costruzione e si faccia il limite di tale lunghezza per $n \to \infty$). D'altra parte ha area nulla. E' però possibile definire una misura intermedia tra la lunghezza e l'area che valuta la misura di questa curva dando un risultato finito. In effetti per qualunque $d \in \mathbb{R}$, $d \geq 0$ è possibile definire una misura $\mathcal{H}^d$ (misura di Hausdorff) che abbia dimensione d. Nei casi particolari $d = 1$, $d = 2$, $d = 3$ questa misura coincide effettivamente con la lunghezza, l'area e il volume. Nel caso $d = 0$ questa misura non è altro che la misura che *conta* il numero di punti. Per valori non interi di d le misure di Hausdorff ci permettono di misurare i frattali.

Lasciamo per esercizio il divertimento di determinare la dimensione delle seguenti figure autosimilari (nel caso dell'antenna, il calcolo richiede qualche accortezza in più, il risultato corretto è $d = 2$).

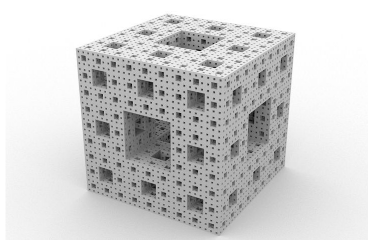
[1] Cosa voglia dire esattamente "ripetere all'infinito" e come mai in questo processo "al limite" si ottenga veramente qualcosa, è un fatto assolutamente non banale che può essere affrontato solamente in un corso avanzato di matematica.



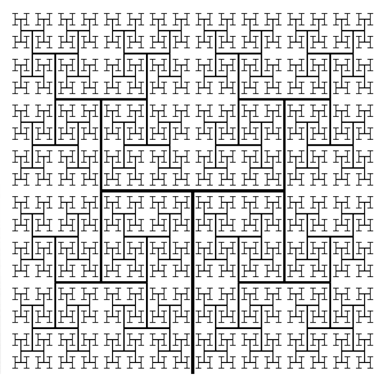
(a) triangolo di Sierpinski



(b) tappeto di Sierpinski



(c) spugna di Menger



(d) antenna frattale

Figura 6: Frattali autosimilari.