

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 37 - 19.12.2025

Rolle: $\overset{b>a}{f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}}$ continue, derivabile su (a,b)
 $f(b) = f(a) \Rightarrow \exists t \in (a,b) : f'(t) = 0$

Lagrange: $\dots \exists t : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(t)$

Cauchy: $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, derivabili in (a,b)
 $g'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a,b)$ (quindi $g(b) \neq g(a)$)

$$\exists t \in (a,b) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

dim (sufficiente) Lagrange: $\exists t_1 \quad f'(t_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
 $\exists t_2 \quad g'(t_2) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$
 $\Downarrow$
 $\text{No} \quad \frac{f'(t_1)}{g'(t_1)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad \square$

dim benvi mostrare che $\exists t$

Tesi $g'(t) (f(b) - f(a)) - f'(t) (g(b) - g(a)) = 0$

considero $H(x) = g(x) (f(b) - f(a)) - f(x) (g(b) - g(a))$

$$H(b) - H(a) = (g(b) - g(a)) (f(b) - f(a)) - (f(b) - f(a)) (g(b) - g(a)) = 0$$

$\xRightarrow{\text{Rolle}} \exists t : H'(t) = 0 \quad \square$

Teorema (di de l'Hôpital) $f, g: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo
 f, g derivabili $x_0 \in [-\infty, +\infty]$, $g'(x) \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ esiste}$$

allora
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$



(MA)

Da $\sin x = \cos x$ presumere di sapere
 il limite notevole
$$\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Stessa cosa per
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

Piano 1
 $\lim_{x_0 \in \mathbb{R}}$ estendo f e g al punto x_0

ponendo $f(x_0) = 0, g(x_0) = 0$.

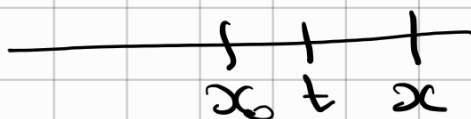
Otengo delle funzioni continue su tutto I
 (per ipotesi $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$).

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Candry $\exists t$

$t = t(x)$

$t \in (x_0, x)$



per $x \rightarrow x_0$

$t \rightarrow x_0$

$$\text{se } x_0 = +\infty$$

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$x = \frac{1}{t}$$

$$G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$$

per $x \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow 0$.

Applico Pono 1 a F, G per $t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{G'(t)}$$

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right), \quad G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)$$

F, G soddisfano le ipotesi per $t \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} F(t) &\rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0^+ \\ G(t) &\rightarrow 0 \quad \text{"} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) &\rightarrow 0 \\ G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \frac{1}{t} \rightarrow +\infty$$

Ma $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

$t = \frac{1}{x}$

$$\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Teorema lo stesso risultato vale nel
caso $\frac{\infty}{\infty}$ $\leftarrow$ qualunque cosa

dim (VEDI APPUNTI) $\square$

Oss. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

se f è continua il rapporto incrementale è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

SE

il limite esiste.

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ significa f' continua in x_0

Esistono funzioni derivabili la cui derivate non è continua?

Esempio (SÌ)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile:

$$\begin{aligned} \text{se } x \neq 0 \quad f'(x) &= \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\text{se } x = 0 \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \overset{\substack{0 \\ \uparrow}}{x} \overset{\substack{\text{limitata} \\ \uparrow}}{\sin \frac{1}{x}} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

MA: Per $x \rightarrow 0$ $2x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$ $\cos \frac{1}{x}$ non ha limite

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ non esiste

$\Rightarrow f'$ non è continua. $\square$

OSS 1 se la derivata non è continua
è perché il limite della derivata non esiste

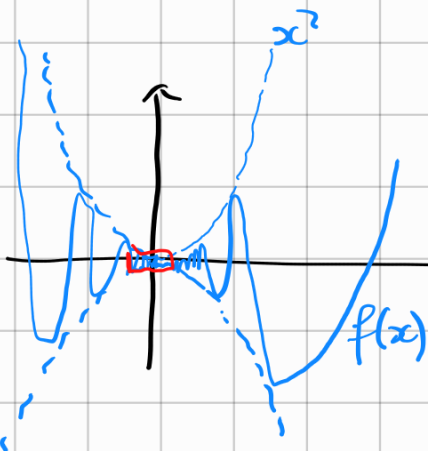
OSS 2 Tutto questo si poteva dire usando
l'approccio invece che l'Hôpital.

OSS 3 Vale in effetti il seguente:

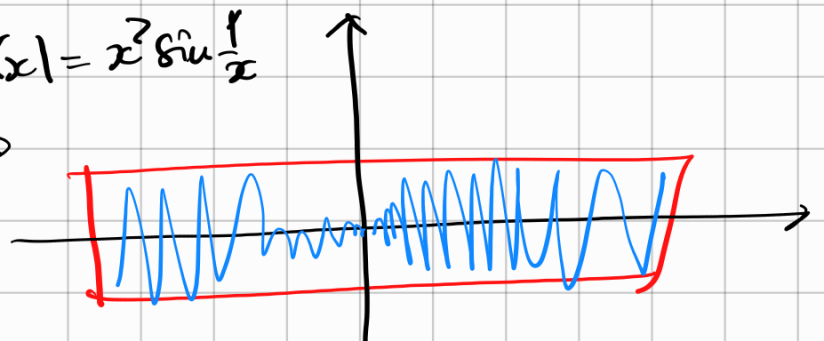
Teorema (Darboux) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile

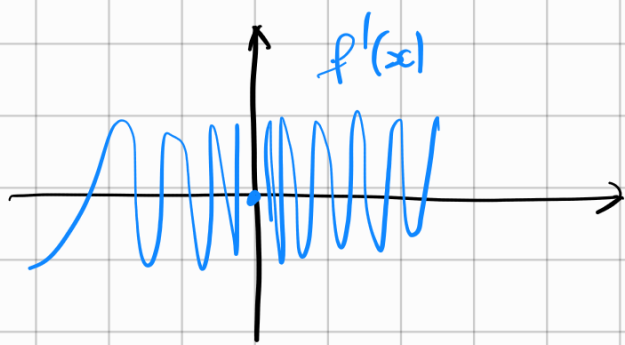
allora f' soddisfa la proprietà dei valori
intermedi: $f'(I)$ è un intervallo cioè

$$f(x_1) = m_1, \quad f(x_2) = m_2 \quad \forall m \in (m_1, m_2) \\ \exists x \in (x_1, x_2) \quad f(x) = m.$$



$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$





dim VEDI APPUNTI.

CLASSI DI REGOLARITA'

$$C(A) = \{ \text{funzioni } f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \}$$

(è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita (se A è infinito))

NOTAZIONE
NON
STANDARD

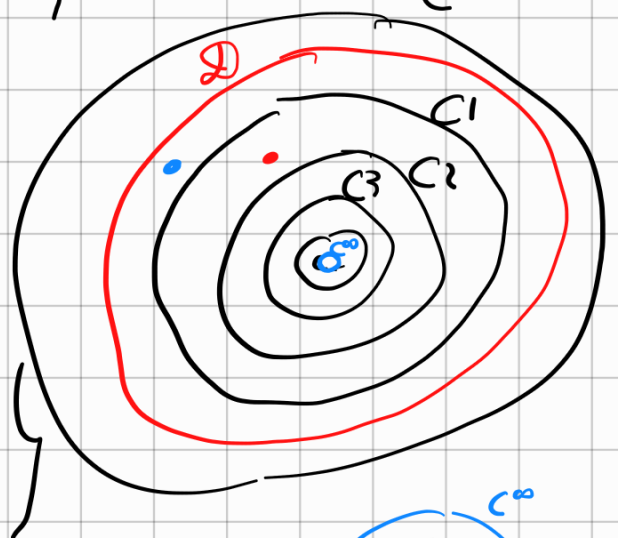
$$D(A) = \{ \text{funzioni } f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ derivabili} \}$$

$$D(A) \subseteq C(A) \subseteq \mathbb{R}^A = \{ \text{tutte le funzioni} \}$$

$$C^0(A) = C(A)$$

$$C^1(A) = \{ f \in D(A) : f' \in C^0 \}$$

$$= \{ f \in C^0(A) : f \text{ derivabile} \\ f' \in C^0 \}$$



$C^1 \neq D$ per l'esempio $\bullet = \int_0^x x^2 \sin \frac{1}{x} dx$

$$\vdots$$

$$C^{n+1} = \{ f \in C^n : f' \in C^n \}$$

$$= \{ f \in C^n : f \text{ derivabile } n \text{ volte e} \}$$

la derivata n -esima è continua}

$$C^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n = \{ f : f \in C^n \ \forall n \in \mathbb{N} \}$$

$$C^\omega = \{ \text{funzioni analitiche} \} \subsetneq C^\infty$$

↳ si scrivono come somma di una serie di potenze

Es $f(x) = \sin x \quad f \in C^\omega \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Es $f \in C^\infty \setminus C^\omega$ lo vedremo più avanti.
ma è $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

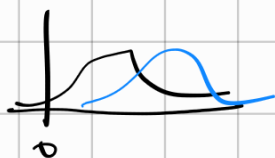
Es • $f(x) = |x|^3 = |x^3|$

$$f'(x) = 3 \cdot |x| \cdot x$$

$$f''(x) = 6|x|$$

f'' non è derivabile.

$$\Rightarrow f \in C^2(\mathbb{R}) \setminus C^3(\mathbb{R})$$



Ej 2 (c) del compitmo



$$x^n + x - 1 = 0$$

$$a_n^n + a_n - 1 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} b_n & \leq & a_n \leq c_n \\ \parallel & & \parallel \\ 1/\sqrt[n]{n} & \nearrow & \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^d \end{array}$$

$$\dots\dots f(b_n) < 0, \quad f(c_n) > 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^d = e^{-d \frac{\ln n}{n}} = -d \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n} \right).$$