

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 36 - 17.12.2025

CONVESSITA'

$$0 \leq t \leq 1$$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2)$$

f derivabile $\Rightarrow$

f convessa



f' crescente

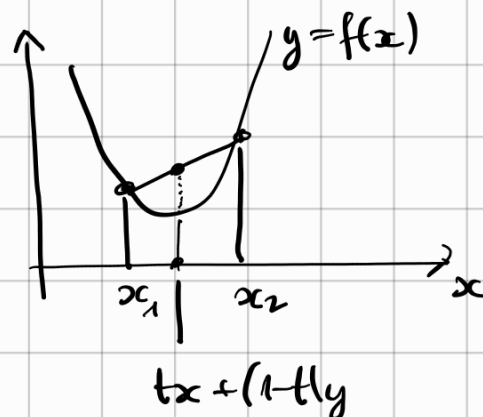


$$f'' \geq 0$$

f derivabile
due volte $\Rightarrow$

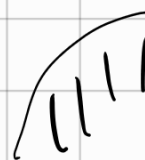
$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$\uparrow$
intervallo



CONCAVO

f concavo $\Leftrightarrow -f$ convessa.



ES: $f(x) = \ln x$ $\bar{e}$ concava. ($x > 0$)

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$\ln x$ $\bar{e}$ (strettamente) concava.

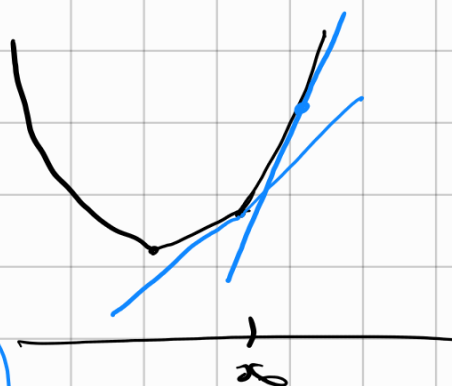
ES: $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$ $f''(x) = 2 > 0$
 $\bar{e}$ (strettamente) convessa.

RETTA DI SUPPORTO

f convessa
 $\forall x_0 \exists m$ t.c.

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$$

retta di supporto



Disuguaglianza di Jensen

f convessa, $t_i \geq 0$ $\sum_{i=1}^N t_i = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

OSS $n=2$ è la definizione di convessità
... si potrebbe dimostrare per induzione

dim (funziona anche con gli integrali)

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n t_i x_i$$

in $\bar{x}$ c'è una retta

di supporto: $y = L(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$

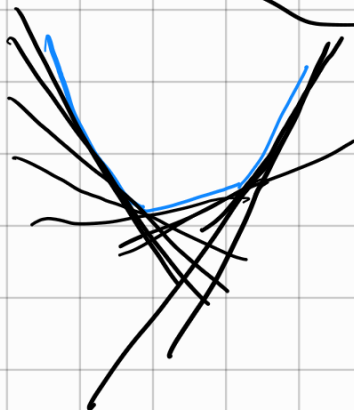
(i) $L(\bar{x}) = f(\bar{x})$

(ii) $L(x) \leq f(x) \quad \forall x$

$$f(\bar{x}) = L(\bar{x}) = L\left(\sum_{i=1}^N t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^N t_i L(x_i) \leq \sum_{i=1}^N t_i f(x_i)$$

□

L è lineare



$$f(x) = \sup L(x)$$

L retta di supporto

Esempio [disuguaglianza AM-GM]

$f(x) = \ln x$ è concava

$t_i \geq 0, \sum t_i = 1$

$$\ln \sum_{i=1}^n t_i x_i \geq \sum_{i=1}^n t_i \ln(x_i)$$

(Jensen)

$$t_i = \frac{1}{n}$$

$$x_i > 0$$

$$\ln \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

applico exp:

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

$\uparrow$
 AM (media aritmetica)
 GM (media geometrica) $\square$

Oss per $n=2$ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$ è facile
 $(a, b > 0)$

da dimostrare, Elevo al quadrato:

$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} \stackrel{?}{\geq} a \cdot b$$

$$a^2 + b^2 \stackrel{?}{\geq} 4ab - 2ab = 2ab$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \stackrel{?}{\geq} 0$$

$$(a - b)^2 \stackrel{!}{\geq} 0$$

$\square$

SUBADDITIVITA' (prezzi)

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

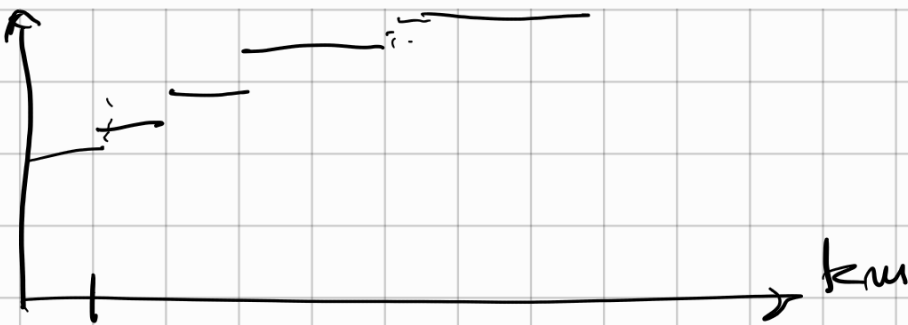
Esercizio $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) \geq 0$, f concava

allora f sub-additiva.

OSS

mondo
del biglietto

le funzioni lineari



a tratti non sono mai concave.

Se il punto è "discreto" trova x, y

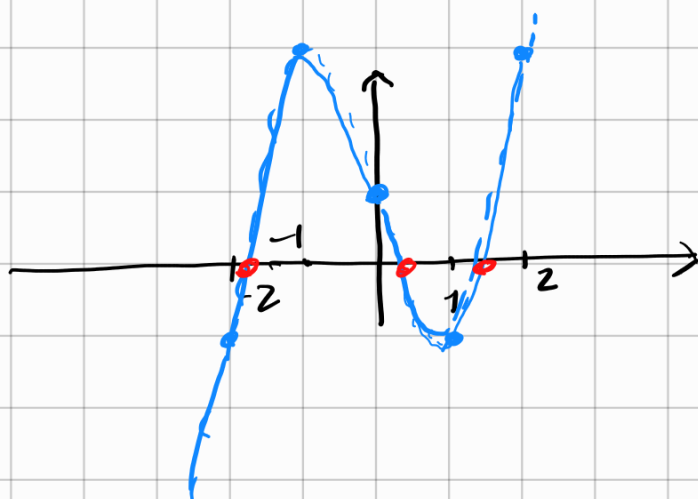
che violano la concavità: $f(x) + f(y) \leq f(xy)$

STUDIO di FUNZIONE

Come usare la derivata per determinare l'andamento di una funzione

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$



$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x^2 - 1) \stackrel{?}{=} 0 \\ &= 3(x-1)(x+1) \quad x^2 = 1 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad x = \pm 1 \end{aligned}$$

$x:$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	Max rel.	Min rel.
			$+\infty$

OTTIMIZZAZIONE trovare massimi e minimi
(risolvere disuguaglianze)

RISOLVERE EQUAZIONI

Es:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

II° IV°
[CARDANO, DEL FERRO, ...]
V° Galois

Ha 3 soluzioni:

3! $x_1 < -1$ t.c. $f(x_1) = 0$

perché: (1) f è strettamente crescente su $(-\infty, -1]$
 f è iniettiva $\Rightarrow$ la soluzione $f(x) = 0$ $\exists$ e unica. (a.e. mi!)

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 3 > 0$

teorema degli zeri: l'equazione $f(x) = 0$
ha almeno una soluzione

analoga:

• c'è una unica soluzione $x_2 \in [-1, 1]$
• " " " " " "
• " " " " " "
 $x_3 \in [1, \infty)$

COME Trovare x_3 ?

Ci sono degli algoritmi (numerici) che
noi peraltro non di approssimare x_3 .

(Esempio metodo di bisezione)

In realtà la formula esatta non è meglio di questo.

$$x^2 = 2$$

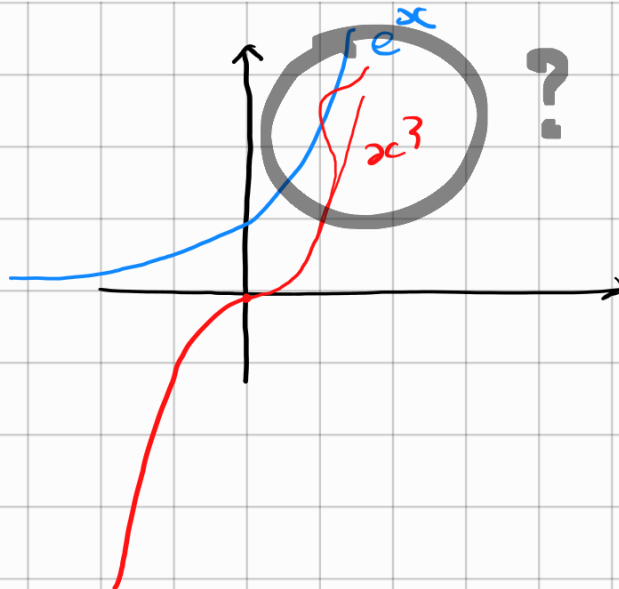
$x = \pm\sqrt{2}$ è una tautologia!

Eg. Risolvere

$$e^x = x^3$$

Posso studiare:

$$\frac{x^3}{e^x - x^3} = 0$$



Oppure osservo che se
c'è una soluzione
è positiva

Facio il logaritmo:

$$x = 3 \ln x$$

$$f(x) = x - 3 \ln x$$

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x} \stackrel{?}{=} 0$$

$$x = 3$$

$x:$	0	3
f'	$\nearrow$	$- \quad 0 \quad +$
f	$\nearrow$	$\searrow$

min
ambiente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

valuto f nel minimo:

$$f(3) = 3 - 3 \ln 3 = 3(1 - \ln 3)$$

$$< 0$$

$$(\ln 3 > \ln e = 1)$$

$\Rightarrow$ l'equazione ha
esattamente 2 soluzioni.
