

Esercizio 1. La serie da studiare è $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

con $a_n := \frac{n^n}{(n-1)!}$

converge e
deve scendere

Si vede facilmente che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{\cancel{n(n-1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-1)!}}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow e$$

per $n \rightarrow +\infty$

Pertanto il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{e}$; la serie converge per $|x| < \frac{1}{e}$, diverge per $|x| > \frac{1}{e}$ ed è indeterminata per $|x| = \frac{1}{e}$.

Quando $|x| = \frac{1}{e}$ la serie NON converge perché l'addendo non è infinitesimo, infatti si ha

$$\frac{a_{n+1} \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{a_n \left(\frac{1}{e}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e} > 1$$

cioè la successione $n \mapsto a_n \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n$ è positiva e crescente (quindi non infinitesima).

ESERCIZIO VERO #2

Definiamo $f_n(x) = x^n + x - 1$

a) Osserviamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n è continua e strettam. crescente su $[0, +\infty)$ (in quanto somma di funzioni crescenti su $[0, +\infty)$)

Dato che $f_n(0) = -1$ $f_n(1) = 1$, per il teorema degli zeri
 $\forall n \geq 1 \quad \exists a_n \in (0, 1)$ t.c. $f_n(a_n) = 0$.

Dato che f_n è strett. crescente si avrà

$$\begin{cases} f_n(x) < 0 & \text{per } x \in [0, a_n) \\ f_n(x) > 0 & \text{per } x \in (a_n, +\infty) \end{cases}$$

ovvero a_n è l'unica soluzione positiva dell'equazione $f_n(x) = 0$

b) Dato che $0 = f_n(a_n) = a_n^n + a_n - 1 > a_n^{n+1} + a_n - 1 = f_{n+1}(a_n)$
 perché $a_n \in (0, 1)$

Ma, dato che f_{n+1} è strett. crescente, $f_{n+1}(a_n) < 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

ovvero a_n crescente in n .

Inoltre per ogni $\varepsilon \in (0, 1)$ fissato si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1-\varepsilon) = -\varepsilon < 0$

Pertanto $f_n(1-\varepsilon) < 0$ definitivamente $\Rightarrow a_n \in (1-\varepsilon, 1)$ definitivamente

Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

c) Basta provare che $1 - a_n \sim \frac{\log n}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$; per far ciò
 mostreremo che $1 - a_n \sim 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; Si noti che $1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 - e^{-\frac{\log n}{n}} \sim \frac{\log n}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$

Osserviamo che $f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} - 1 \sim -\frac{\log n}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$

D'altra parte, $\forall \alpha \in (0, 1)$ $f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}}\right) = \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} - 1 \sim \frac{1}{n^\alpha}$
 per $n \rightarrow +\infty$

Di conseguenza si ha che, definitivamente $f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) < 0$
 $f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}}\right) > 0$

e quindi $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}}$ definitivamente

da cui

$$\frac{n}{\log n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}}\right) \leq \frac{n(1-a_n)}{\log n} \leq \frac{n}{\log n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) \quad \text{definitivamente.}$$

Quindi $\limsup \frac{n(1-a_n)}{\log n} \leq \limsup \frac{n}{\log n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) = 1$

$\otimes$ $\liminf \frac{n(1-a_n)}{\log n} \geq \liminf \frac{n}{\log n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}}\right) = \alpha$

Dato che $\otimes$ vale $\forall \alpha \in (0,1)$ si ha

$$\liminf \frac{n(1-a_n)}{\log n} = 1 = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1-a_n)}{\log n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1-a_n)}{\log n}$$