

10/02/25 - Lezione 34

⊙ Ric. Stud. I 1

14-16

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n \log n}{1+n^2} \right)$$

converge
x Leibnitz

$$a_n = f(n)$$

$a_n > 0$, infinitesima, decrescente

$$\underline{a_{n+1} < a_n}$$

$$f(x) = \frac{x \log x}{1+x^2}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{su } [m, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{(\log x + 1)(1+x^2) - x \log x (2x)}{(1+x^2)^2}$$

← N
← D > 0

$$N(x) = x^2 \log x + x^2 + \log x + 1 - 2x^2 \log x$$

$$= x^2 + \log x + 1 - \boxed{x^2 \log x}$$

$$= -x^2 \log x + o(x^2 \log x) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$\exists m \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = -\infty$$

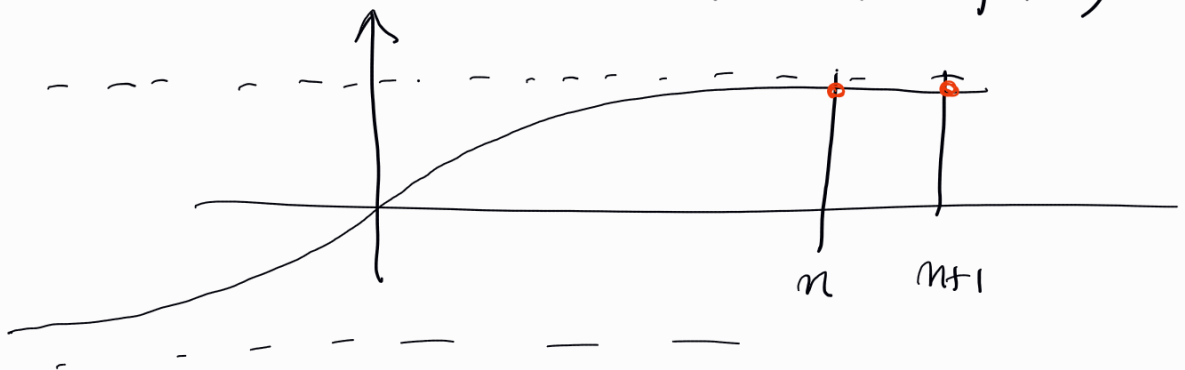
quindi $N(x)$ è negativo
su $(m, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{x(x)}{(1+x^2)^2} < 0 \quad \text{su } (m, +\infty)$$

f decrescente su $(m, +\infty)$

a_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\underbrace{\arctan(n+1) - \arctan n}_{f(n+1) - f(n)})$$



$$f'(n+1) - f(n) = f'(c_n) \cdot 1$$

$$= \frac{1}{1+c_n^2}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) (b - a)$$

$c \in (a, b)$

$$c_n \in (n, n+1)$$

$$\frac{n^2}{1+(n+1)^2} \leq a_n = \frac{n^2}{1+c_n^2} \leq \frac{n^2}{1+n^2}$$

$\downarrow$ 1 $\downarrow$ 1 $\downarrow$ $n \rightarrow +\infty$ 1

$$h(x) \doteq \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)$$

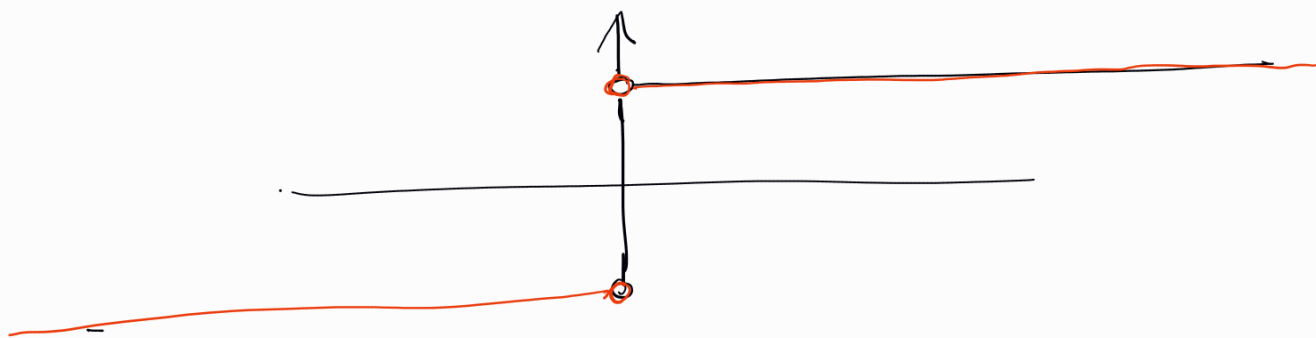
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$\Rightarrow h \equiv \text{cost}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Dom}(h) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$



$h' \equiv 0 \Rightarrow h \equiv \text{cost}$ vale solo su intervalli

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Esercizio: usare questa formula per calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\arctan(n+1) - \arctan n)$

DERIVATA VS PROPRIETÀ DI SIMMETRIA

$$f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D(f) = -D(f)$$

f derivabile

(i) f pari $\Rightarrow f'$ dispari

(ii) f dispari $\Rightarrow f'$ pari

Es: $f(x) = \log|x|$ pari
 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dispari}$$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

f pari

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow w(x) \doteq f(x) - f(-x) = 0$$

$$w'(x) = f'(x) - f'(-x)(-1) = f'(x) + f'(-x)$$

$\parallel$

0

$$\Rightarrow f'(x) = -f'(-x)$$

cioè f' è dispari

⊗ Vale, in generale, l'implicazione inversa?

NO: p. es

$$f(x) = \begin{cases} \log|x| & x > 0 \\ 1 + \log|x| & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

ma f non è pari

$f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile

f' dispari $\Rightarrow f$ pari

$$w(x) = f(x) - f(-x)$$

$$w'(x) = f'(x) + f'(-x) \stackrel{\substack{f' \text{ dispari} \\ \forall x}}{=} 0$$

w def su $(-a, a)$

$$\Rightarrow w \equiv \text{cost}$$

$$w(0) = f(0) - f(-0) = 0 \quad \leftarrow$$

$$f(x) - f(-x) \equiv 0$$

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in (-a, a)$$

$f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile

f' pari $\xrightarrow{\text{NO}} f$ dispari?

$$f(x) = 1 + x^2 \quad f'(x) = 2x$$

Es Mostrare che se $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile
 f' pari $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ t.c.

$f(x) - c$ è dispari

Es: Mostrare che se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile
 f periodica $\Rightarrow f'$ periodica

Q: È vero che f' periodica $\Rightarrow f$ periodica?

N/O: $f'(x) \equiv 1 \leftarrow$ periodica

$f(x) = x + c \leftarrow$ non periodica

FATTO:

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile

f' è T periodica

Alloca $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. media di f' su un periodo

$h(x) = f(x) - mx$ è T -periodica

Dim: $T > 0$ fissato. f T -periodica

$$f'(x+T) = f'(x) \quad \text{per } @$$

$$w(x) = f(x+T) - f(x)$$

$$w'(x) \stackrel{=}{=} 0 \quad \text{per } @$$

$$w(x) \equiv w(0) = f(T) - f(0) = c$$

$$h(x) \doteq f(x) - \frac{c}{T} x \quad \text{è periodica}$$

$$(h(x+T) - h(x))' = w'(x) = 0$$

$$h(T) - h(0) = f(\cdot + T) - f(0)$$

$$- \frac{c}{T} [T - 0]$$

$$= c - \frac{c}{T} \cdot T = 0$$

$$\Rightarrow h(x+T) - h(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow f(x) = \frac{c}{T} x + \underset{\text{periodica}}{h}$$

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} I \text{ intervallo} \end{array}$$

continua su I
derivabile
nei punti interni

$$|f'(x)| \leq m \quad \forall x \in I$$



$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$$

DIM Applico Lagrange su $[x_1, x_2] \subset I$

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c) (x_1 - x_2)$$

con c tra x_1 e x_2

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |f'(c)| |x_1 - x_2| \\ &\leq M |x_1 - x_2| \end{aligned}$$



Attenzione: la conclusione
non sarebbe garantita se I non
fosse un intervallo.

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ |x|^{\alpha} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Per quali $\alpha > 0$ ($\alpha > 0$)

① f_{α} è continua

② f_{α} è derivabile

③ f'_{α} è continua

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_{\alpha}(x) = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

in finitissima x l'unità è infinita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \cancel{f(0)}^0}{x - 0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} = 0$$

$\nearrow$
se $\alpha > 1$

invece se $\alpha > 0$

ma

$$\alpha \leq 1$$

$$\frac{|x|^\alpha}{x}$$

$$\begin{cases} \geq 1 & \text{se } x \downarrow > 0 \\ \leq -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$(|x| < 1)$$

Quindi il limite
non esiste

se $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= \alpha |x|^{\alpha-2} \cdot x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \\ &\quad + |x|^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= |x|^{\alpha-2} \left(\alpha x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{se } \alpha > 2 \quad f'_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{se } \alpha \in (1, 2) \quad f'_\alpha(x) \not\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

f_x

↓
funzione derivabile
con derivata
non continua

TEOR: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile
allora $\text{Im}(f')$ è un intervallo

Dim $x_1 < x_2$ $x_1, x_2 \in (a, b)$

suppongo $f'(x_1) < f'(x_2)$

$m \in [f'(x_1), f'(x_2)] \Rightarrow \exists$

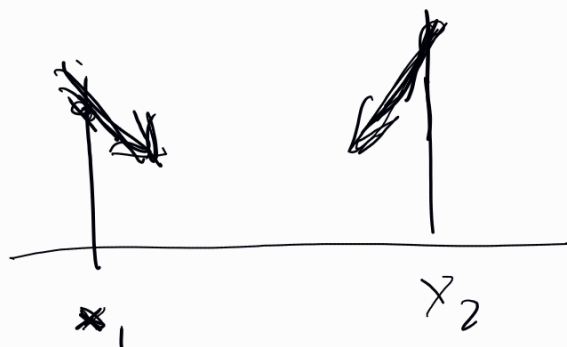
$\bar{x} \in (x_1, x_2) : f'(\bar{x}) = m$

$$h(x) \doteq f(x) - mx$$

$$f'(x_1) < m < f'(x_2)$$

$$h'(x_1) = f'(x_1) - m < 0$$

$$h'(x_2) = f'(x_2) - m > 0$$



h continua
 $\Downarrow$
 ammette minimo
 su $[x_1, x_2]$

h è decrecente in un
 intorno destro di x_1 e
crescente in intorno sinistro
 di x_2

$\bar{x}$ punto di minimo
 vincolato
 non può cadere agli
 estremi x_1, x_2

$$\Rightarrow \bar{x} \in (x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow h'(\bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow f'(\bar{x}) = m$$

ASINTOTI

$$f: [m, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

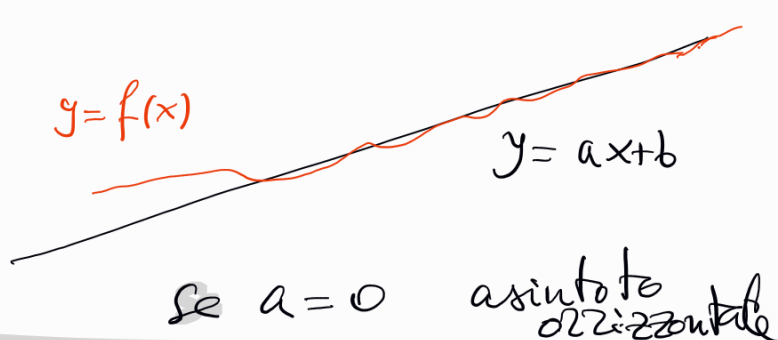
f ha un asintoto obliquo a $+\infty$ se
 $\exists a, b \in \mathbb{R}$

$$f(x) = ax + b + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$$f(x) - (ax + b) = o(1)$$

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax$$



Esempio

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha x + \beta}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$f(x) \stackrel{x>0}{=} x \sqrt{1 + \underbrace{\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}}_{\substack{\text{infinitesimo} \\ \text{per } x \rightarrow \infty}}} = x \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} \right) + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \quad \text{per } x \rightarrow \infty$$

$$= x \left(1 + \frac{\alpha}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon)$$

$$= x + \frac{\alpha}{2} + o(1)$$

per $x \rightarrow +\infty$

Oss: se $f(x) = ax + b + o(1)$ per $x \rightarrow +\infty$

e $f'(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow l = a$$

Dim: $h(x) = f(x) - ax$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = b \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = l - a$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} h(n+1) - h(n) = 0$$

$$h(n+1) - h(n) = h'(c_n) \quad \text{con } c_n \in (n, n+1)$$

$$\text{Quindi } \exists c_n \nearrow +\infty \quad \text{f.c.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h'(c_n) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) &= 0 \\ \parallel \\ l - a \end{aligned}$$

Es: Trovare massimi e minimi di
per
casa $f(x) = x^3 + x^2 - |x| + 2$
su $[-2, \frac{1}{2}]$