

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 32 - 3.12.2025

NOTAZIONI

DERIVATE f funzione f' , Df , $\frac{d}{dx}f$, $\frac{df}{dx}$,

Derivata della funzione composta

$$D f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(D f \circ g = f' \cdot g')$$

Esempi

$$\bullet f(x) = \sin(\ln x)$$

$$f'(x) = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\bullet f(x) = e^{\cos \frac{1}{x}}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} = y \mapsto \cos y = 2 \rightarrow e^2$$

$$f'(x) = e^{\cos \frac{1}{x}} \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\bullet f(x) = \frac{1}{2x+3}$$

$$x \mapsto 2x+3 = y \mapsto \frac{1}{y}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(2x+3)^2} \cdot 2$$

Teo (derivata della funzione inversa)

Sia f una funzione invertibile, derivabile in un punto x_0 . Supponiamo che f^{-1} sia continua in $f(x_0)$. Se $f'(x_0) \neq 0$ allora

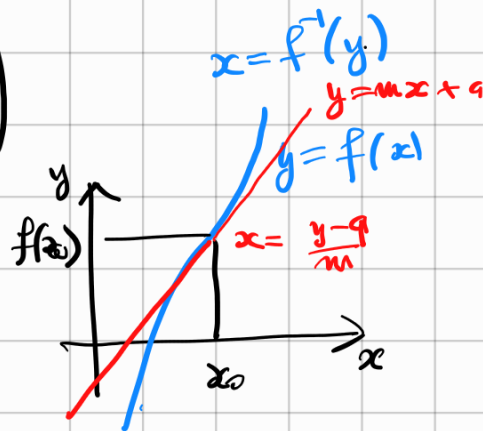
f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ovvero $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Se invece $f'(x_0) = 0$ allora

$f^{-1}(y_0)$ non è derivabile.



dim $(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$

se il limite esiste.

tip $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

esiste, finito
non nullo,
per ipotesi.

Cambio di variabile: $y_0 = f(x_0)$
 $y = f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= y - y_0 \\ x - x_0 &= f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \end{aligned}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} \xrightarrow{(*)} f'(x_0) \text{ per } y \rightarrow y_0$$

per $x \rightarrow x_0$ $\downarrow$ $f'(x_0)$

f^{-1} continua in y_0
 $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) \Rightarrow x \rightarrow x_0$

Osservando. il denominatore si annulla
 Solo se $y = y_0$ però f^{-1} è iniettiva (f è invertibile)

Ma allora
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$$

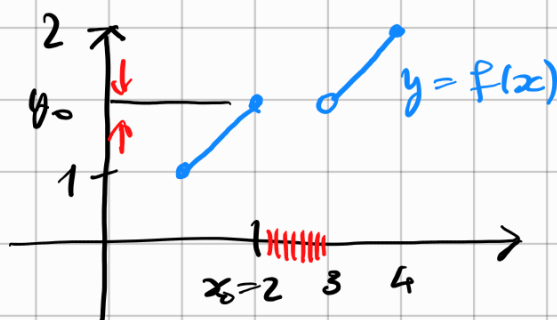
se $f'(x_0) = 0$ Questo esprime $\frac{1}{0}$

quindi $\left| \frac{\Delta f^{-1}}{\Delta y} \right| \rightarrow +\infty$ quindi f^{-1} non
 è derivabile in y_0 .

QUESTIONE DUBBIA: E' possibile che
 $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ non esista?

Esempio cattivo

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [1, 2] \\ x-1 & \text{se } x \in (3, 4] \end{cases}$$



$f : [1, 2] \cup (2, 3] \rightarrow [1, 2]$ è invertibile

$f^{-1} : [1, 2] \rightarrow [1, 2] \cup (2, 3]$

non è continua (e quindi non è derivabile)
 nel punto $y_0 = 2$.

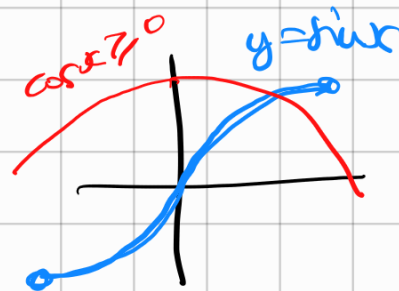
APPLICAZIONI:

• $f(x) = e^x$ $f^{-1}(y) = \ln y$

$$D \ln y = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

• $f(x) = \sin x$ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$f^{-1}(y) = \arcsin y$ (seppur non è continua per il criterio di continuità dell'inversa)



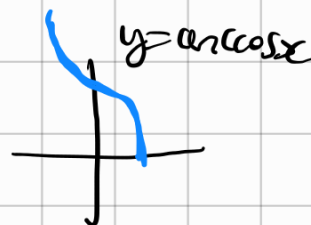
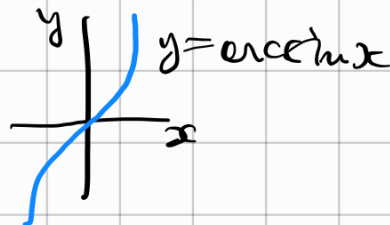
$$f'(x) \neq 0 \quad \text{se} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$D \arcsin y = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}}$$

↑
è positivo

se $x = \arcsin y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$D \arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$



Analogamente

$$D \arccos y = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}$$

Derivata della somma e del prodotto

Teo f e g derivabili in x_0

$$D(f+g) = Df + Dg$$

$$D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + f \cdot Dg$$

dim $(\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g)$ Somma

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow f'(x_0) + g'(x_0)$$

$\downarrow$ $\xleftrightarrow{\text{ipotesi}}$ $\downarrow$ $\uparrow$
tesi

$f'(x_0)$ $g'(x_0)$

ok

Prodotto

$$\Delta(f \cdot g) \approx \Delta f \cdot g + f \cdot \Delta g$$

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\text{ipotesi} \downarrow \\ f'(x_0)}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\substack{\downarrow \\ g(x_0)}} + f(x_0) \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\downarrow \text{ipotesi} \\ g'(x_0)}}$$

$\left\{ \begin{array}{l} g \text{ continua} \\ \text{perci\u00f2} \\ \text{derivabile} \end{array} \right\}$

per $x \rightarrow x_0$

$$\longrightarrow f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \quad \square$$

DERIVATA DELLA DIFFERENZA E DEL RAPPORTO

$$\bullet \quad f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$$

$$D f - g = D f + D(-g) = D f - D g.$$

$$\begin{aligned} D(-g) &= D(h \circ g) \\ &= -Dg \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(y) &= -y \\ h'(y) &= -1 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad D \frac{f}{g} = D f \cdot D \frac{1}{g} = D(f \cdot (h \circ g))$$

$$= f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot D \frac{1}{g}$$

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{1}{y} \\ h'(y) &= -\frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{f'}{g} + f \cdot \left(-\frac{1}{g^2} \cdot g' \right)$$

$$= \frac{f'}{g} - \frac{f \cdot g'}{g^2} = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2} \quad \square$$

OSSERVAZIONE

La derivata è un operatore lineare sullo spazio vettoriale delle funzioni derivabili.

$$A \subseteq \mathbb{R}$$

$$V = \{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile} \}$$

V è uno spazio vettoriale reale.

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$$

$$\begin{array}{l} f+g \in V \text{ se } f, g \in V \\ \lambda \cdot f \in V \text{ se } f \in V \\ \text{e } \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\square$ se $A = \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mostro che esiste un insieme indipendente con n elementi.

(V ha dimensione infinita)

[$\square$ (VIN SANTO) ~~Trovare~~ una base di V .]
(dimostrare che esiste)

$$D: V \xrightarrow{\subset W} W = \mathbb{R}^A := \left\{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ funzione} \right\}$$

[Non è detto che la derivata di una funzione sia a sua volta derivabile]

Es Δ $f(x) = \begin{cases} x \cdot x & \text{se } x \geq 0 \\ -x \cdot x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

$\rightarrow f'(x) = 2|x|$

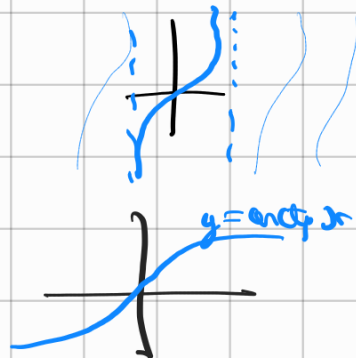
Vogliamo saper fare la derivata di tutte le funzioni elementari.

(quindi sappiamo fare la derivata di qualunque funzione che si può scrivere come composizione, somma, prodotto, di funzioni elementari).

$$D \tan x = D \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \tan^2 x}{1}$$

$$D \arctan x = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$



$$D|x| = \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0)$$

POTENZE

$$Dx^2 = D(x \cdot x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

per induzione su $n \in \mathbb{N}$
 $n \neq 0$

induzione: • $n=1$ è ovvio

ipotesi
induttiva
↓

$$\begin{aligned} \bullet Dx^{n+1} &= D(x \cdot x^n) = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} \\ &= x^n + nx^n = (n+1)x^n \quad \square \end{aligned}$$

$$Dx^{-n} = D\frac{1}{x^n} = -\frac{1}{(x^n)^2} \cdot nx^{n-1} = -n \cdot x^{-n-1}$$

$$n-1-2n = -n-1$$

Stessa formula

$$Dx^d = dx^{d-1}$$

$$\begin{aligned} Dx^d &= D e^{d \ln x} = e^{d \ln x} \cdot \frac{d}{dx} = x^d \cdot \frac{d}{dx} \\ &= d \cdot x^{d-1} \quad \square \end{aligned}$$

ESPOENZIALE

$$Da^x = D e^{x \ln a} = a^x \cdot \ln a$$