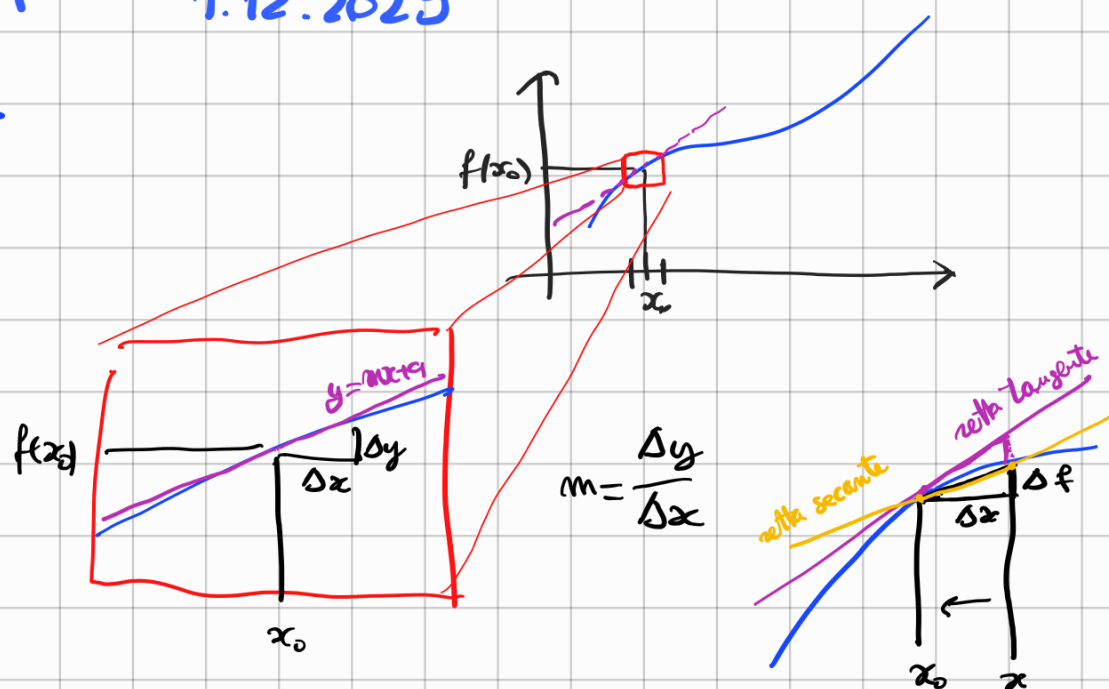


ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 31 — 1.12.2025

DERIVATA



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se $f(x) = mx + q$ abbiamo già visto che $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$

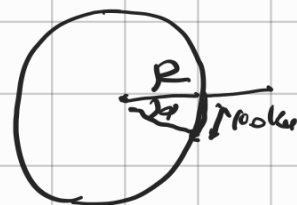
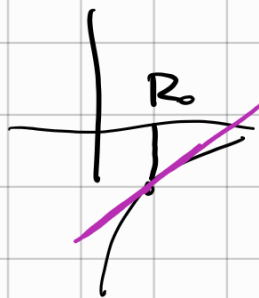
Es $U = gh$ è la linearizzazione di
potenziale gravitazionale

$$U = -G \cdot \frac{M}{R}$$

$$h = R - R_0$$

$$\left(g = \frac{GM}{R^2} \right)$$

vedi appunti



(x_0 è un punto di accumulazione per dom f)
Def Se $\forall$ il limite (*) esiste chiameremo **DERIVATA**
di f nel punto x_0 il valore di tale limite:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (*)$$

se il limite esiste ed è finito diremo
che la funzione è **DERIVABILE** nel punto x_0 .

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$B = \left\{ x \in A : \begin{array}{l} x \text{ punto di accumulazione,} \\ f \text{ derivabile in } x \end{array} \right\}$$

$$f': B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Diremo che $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **DERIVABILE**
se f è derivabile in $x_0 \quad \forall x_0 \in A$.

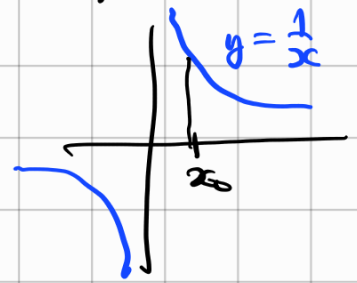
Es 1 $f(x) = mx + q$ è derivabile $f'(x) = m$

[Es 0 $f(x) = q$ $f'(x) = 0$]

Es 2 $f(x) = \frac{1}{x}$ $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

f è derivabile?

fissiamo $x_0 \neq 0$



$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{-\cancel{(x - x_0)}}{x_0 \cdot x \cdot \cancel{(x - x_0)}} = -\frac{1}{x_0 \cdot x} \\ x &\neq x_0 \end{aligned}$$

re $x \rightarrow x_0$

$$-\frac{1}{x_0^2}$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ è derivabile e

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Dss se f è continua in x_0 $f(x) \rightarrow f(x_0)$
per $x \rightarrow x_0$

dunque $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per $x \rightarrow x_0$.

Teo Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0 .

dim Hyp: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow m \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow x_0$

Ter $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$

$$\begin{array}{ccc} f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) & & \\ \text{per } x \neq x_0 & \downarrow & \downarrow \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ m & \cdot & 0 = 0 \quad \square \end{array}$$

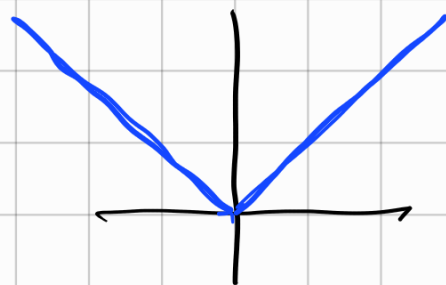
ES Esistono funzioni continue ma non derivabili.

$f(x) = |x|$ è continua ma non è derivabile
in $x_0 = 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

per $x \rightarrow 0$ il limite destro è 1 il limite sinistro è -1 dunque il limite non esiste $\square$

Oss dallo località del
 limite è ovvio che



$f(x) = |x|$ è derivabile

per $x \neq 0$ e vale $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{(derivata di } x \text{ per } x > 0) \\ -1 & \text{(derivata di } -x \text{ per } x < 0) \end{cases}$

Osserviamo che i limiti notevoli che
 i limiti notevoli

$$\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1 \quad \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \frac{\cos x - 1}{x} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

sono in effetti derivate:

$$f(x) = e^x \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = 1$$

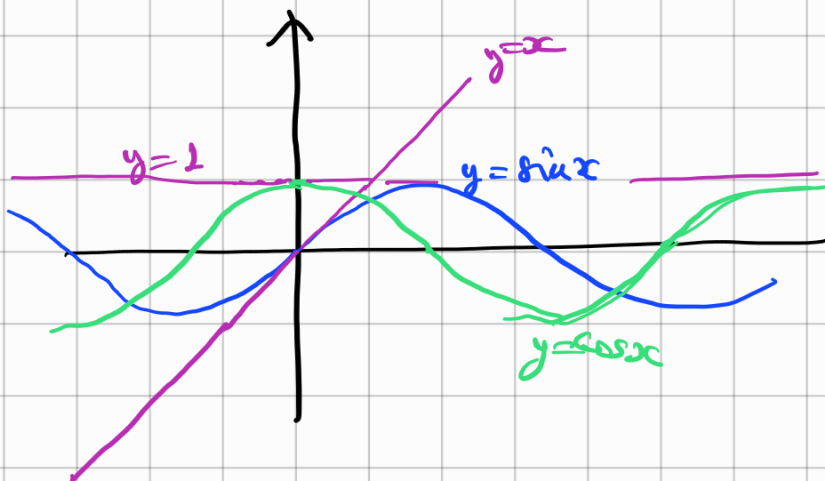
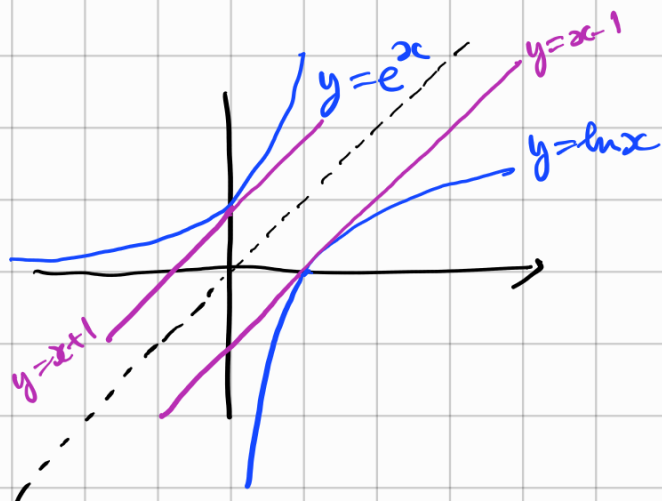
$$g(x) = \ln x \quad g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$t = x - 1$
 $x = 1 + t$

$$\sin'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\cos'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$



• e^x e e derivabile e $(e^x)' = e^x$.

per $x \rightarrow x_0$

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \rightarrow e^{x_0} \cdot 1$$

$\downarrow$
 $t = x - x_0$
 1

• per $x \rightarrow x_0$ $x_0 > 0$

$$\frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\ln \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)}{x_0 \cdot \frac{x - x_0}{x_0}} =$$

$$= \frac{\ln(1+t)}{x_0 \cdot t} \rightarrow \frac{1}{x_0} \cdot 1$$

$\downarrow$
 1

$t \rightarrow 0$

se $x \rightarrow x_0$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- $(\sin x)' = \cos x$

per $x \rightarrow x_0$

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \stackrel{t = x - x_0}{=} \frac{\sin(x_0 + t) - \sin x_0}{t} \quad t \rightarrow 0$$

$$= \frac{\sin x_0 \cos t + \cos x_0 \sin t - \sin x_0}{t}$$

$$= \sin x_0 \cdot \frac{(\cos t - 1)}{t} + \cos x_0 \cdot \frac{\sin t}{t} \rightarrow \cos x_0$$

- $(\cos x)' = -\sin x$

$$\frac{\cos(x_0 + t) - \cos x_0}{t} = \frac{\cos x_0 \cos t - \sin x_0 \sin t - \cos x_0}{t}$$

$$= \cos x_0 \cdot \frac{(\cos t - 1)}{t} - \sin x_0 \cdot \frac{\sin t}{t} \rightarrow -\sin x_0$$

Oss Tutto questo poteva essere fatto nel campo complesso!

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

$$(e^z)' = e^z$$

$$\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = e^{z_0} \cdot \frac{e^{z - z_0} - 1}{z - z_0} \rightarrow e^{z_0}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$\frac{e^{ix} - e^{ix_0}}{i(x - x_0)} = -i \cdot \frac{\cos x + i \sin x - \cos x_0 - i \sin x_0}{x - x_0}$$

$$z = ix$$

$$= - \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} \cdot i + \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$$

$$e^{ix_0}$$

derivata di e^z
in $z = ix_0$

$$= \sin x_0 + \cos x_0$$

$$\cos x_0 + i \sin x_0$$

cioè:

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

Teo $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in A$

$g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $f(x_0) \in B$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x_0 \mapsto f(x_0) = y_0 \mapsto g(y_0)$$

Allora $g \circ f$ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

è derivabile in x_0 e la sua derivata è

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

dim (sbagliata)

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{\boxed{f(x) - f(x_0)}} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$y - y_0$

$$\rightarrow g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

$$y = f(x)$$
$$y_0 = f(x_0)$$

$$x \rightarrow x_0$$
$$y \rightarrow y_0$$

[?]

potrebbe
annullarsi
anche quando
 $x \neq x_0$

dim (spiegando conetta)

$$G(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{se } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{se } y = y_0 \end{cases}$$

(è l'estensione continua di $\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$)

$$\frac{g(f(x)) - g(y_0)}{x - x_0} = G(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

↑
come prima se $f(x) \neq y_0$
0 = 0 se $f(x) = y_0$.

per $x \rightarrow x_0$ $f(x) \rightarrow f(x_0)$ (f è continua)

e $G(f(x)) \rightarrow G(f(x_0))$ perché

G è continua (essendo g derivabile)

dunque passando al limite otteniamo

$$\longrightarrow G(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) \quad \square$$

$$f(x) = mx + q$$

$$g(y) = cy + r$$

$$g(f(x)) = c(mx + q) + r$$

$$= \underbrace{c \cdot m}_{\text{è la pendenza}} \cdot x + cq + r$$

è la pendenza

In $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = Ax$$

$$g(y) = By$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = B \cdot (A \cdot x) \\ &= (B \cdot A) \cdot x\end{aligned}$$

