

26 nov 2025 - Lez 29

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$



$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \iff \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$$

$\swarrow$
 a_n

● $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$ (visto lunedì)

● Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ (visto lunedì)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{e} \implies \sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\log(n+1)}$$

è assolutamente conv.?
No...

$$0 \leq \log(1+x) \leq x \quad (x > 0)$$

$$\left| \frac{\cos(\pi n)}{\log(n+1)} \right| = \frac{1}{\log(n+1)} \geq \frac{1}{n}$$

$\cos(\pi n) = (-1)^n$

addendi
di una
serie divergente

$$n \mapsto \log(n+1)$$

crescente & positiva
e tende a $+\infty$

$$n \mapsto \frac{1}{\log(n+1)}$$

è decrescente
e tende a zero

$$\cos(\pi n) = (-1)^n$$

$$x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\log(n+1)}$$

Leibnitz
 $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$$

converge

Per quali $x \in \mathbb{R}$ converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

?

$$\sum \frac{(2)^n}{1+(2)^{2n}} \leq \sum \frac{2^n}{(2)^{2n}} = \sum \frac{1}{2^n}$$

converge

Se $|x| < 1$ la serie converge assolutamente
per confronto

$$0 \leq \left| \frac{x^n}{1+(x^n)^2} \right| \leq |x|^n$$

Se $|x| > 1$ la serie converge ass
per confronto

$$0 \leq \frac{|x^n|}{1+(x^n)^2} \leq \frac{|x|^n}{|x|^{2n}} = \frac{1}{|x|^n}$$

← addendo
di una
serie geom

$$\frac{1}{|x|} < 1$$

convergente

$$x = -1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+1}$$

INDETERMINATA

Ricapitolando: ↴

La serie conv. assolut se $|x| \neq 1$

diverge se $x = 1$

indeterminata se $x = -1$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) \quad \alpha > 0$$

per quali α
converge?

come **NON** risolvere
questo esercizio

$$\text{Oss: } \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

1° ragionamento fallace

$$\log(1+x) \sim x$$

La serie è asintoticamente equiv
a $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ che, per Leibnitz, è convergente

Quindi la serie di partenza
converge $\forall x > 0$

No!

La cosa non dovrebbe stupire più di tanto

Idea: se $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=2}^N x_n = \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n}$$

Leibnitz
 $\in \mathbb{R}$

$+\infty$

diverge a $+\infty$

anche se $x_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ per $n \rightarrow \infty$

(infatti)

$$x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

$$x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (1 + o(1))$$

II ragionamento fallace

$$\log(1+x) \approx$$

positivo
se $x > 0$

neg se $x < 0$

$$y = \operatorname{sgn}(y) |y|$$

$$\log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = (-1)^n \underbrace{\left| \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \right|}_{a_n \geq 0}$$

! Quindi la serie converge
per Leibnitz $\forall \alpha > 0$

No, perché a_n non è decrescente.

Es: calcolare $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

RIORDINAMENTI

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \log 2$$

Ma sommo gli stessi addendi, ma in un ordine diverso, e ottengo...

$$\textcircled{*} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

!
IL RISULTATO
DIPENDE DALL
ORDINE DEGLI
ADDENDI

$$= \frac{3}{2} \log 2$$

Per vederlo usiamo la solita formula

$$H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + \gamma + o(1)$$

per $n \rightarrow \infty$

$$S_{3n}^* = \left[\sum_{\substack{k \text{ disp} \\ k=1}}^{4n} \frac{1}{k} \right] - \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}}_{\text{contributo dei primi } n \text{ addendi di indice pari}}$$

Somma $3n = 2n + n$
termini

contributo dei primi $2n$ addendi di indice dispari

$$\left[\sum_{\substack{k \text{ disp} \\ k=1}}^{4n} \frac{1}{k} \right] = \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k \text{ pari} \\ k=1}}^{4n} \frac{1}{k}$$

$$= H(4n) - \frac{1}{2} H(2n)$$

$$S_{3n}^* = H(4n) - \frac{1}{2} H(2n) - \frac{1}{2} H(n)$$

$$H(4n) = \log 4 + \log n + \gamma + o(1)$$

$$\frac{1}{2} H(2n) = \frac{\log 2}{2} + \frac{\log n}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{o(1)}{2}$$

$$\frac{1}{2} H(n) = \frac{\log n}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{o(1)}{2}$$

+
-
=

$$S_{3n}^* = \log 4 - \frac{\log 2}{2} + o(1)$$

$$= \frac{3}{2} \log 2 + o(1)$$

per $n \rightarrow \infty$

$$\log 4 = 2 \log 2$$

TEOREMA

Se $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ converge ma

$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$ diverge

Allora $\forall \beta \in \overline{\mathbb{R}}$

$\exists \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} x_{\sigma(j)} = \beta$$

Dalle ipotesi segue che:

Idea di dim:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k^+ = +\infty$$

suppongo $\beta \in (0, +\infty)$; a meno di riordinare i termini posso anche supporre che $|x_n| \searrow 0$ per $n \rightarrow \infty$

- ① Sommo termini positivi finché non supero la soglia β
- ② poi sommo termini negativi finché non ritorno sotto a β .

Ripetendo questo ciclo, sommo tutti i termini, e le somme parziali così riordinate S_n^* soddisfano

$$|S_n^* - \beta| \leq |x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

↑ questo perché $\sum x_n$ converge semplicemente

↳ sono casi in cui il risultato della somma è più stabile



TEOREMA

Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è assolutamente convergente

allora $\forall \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ si ha che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{\sigma(j)}$$

LEMMA

Se $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |x_{jk}| < +\infty$

(*)
kj

Allora $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} x_{jk}$ converge e

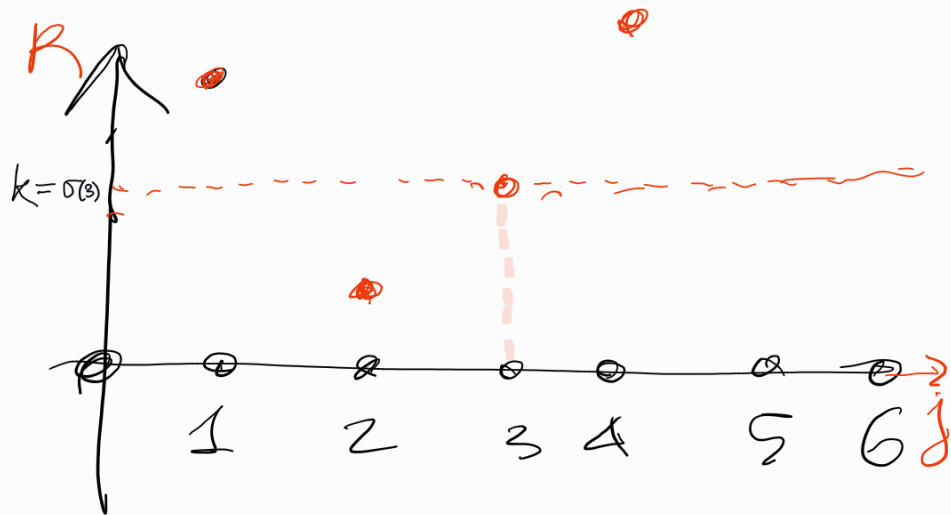
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} x_{jk} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x_{jk}$$

LEMMA $\Rightarrow$ TEOREMA

$$x_{jk} = \begin{cases} a_k & \text{se } k = \sigma(j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Grafico di σ $\rightarrow$

$$\left\{ (k, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid k = \sigma(j) \right\}$$



$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} x_{jk} = \sum_k a_k$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x_{jk} = \sum_j a_{\sigma(j)}$$

Sono uguali per il LEMMA
 $\Rightarrow$ il teorema è dimostrato



ES:
ER
CI
ZIO

Trovare degli $(x_{jk})_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N}}}$ tale che

$$\sum_j \sum_k x_{jk}$$

$$\sum_k \sum_j x_{jk}$$

↖

↗

esistono ma sono diverse

DIM

LEMMA →

$$\sum_j = \sum_{j=0}^{+\infty}$$

LEMMA

Se $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |x_{jk}| < +\infty$ (*) $\sum_j x_{jk}$

Allora

$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} x_{jk}$ converge e

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} x_{jk} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x_{jk}$$

S

• $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\sum_j x_{jk}$$

è ASS. CV, (perché $\sum_j |x_{jk}| < +\infty$)
e quindi convergente

$$\text{e vale } \left| \sum_j x_{jk} \right| \leq \sum_j |x_{jk}|$$

$\sum_k \left(\sum_j x_{jk} \right)$ è ASS. CV
 e quindi converge $\left(\sum_k \left| \sum_j x_{jk} \right| \leq \sum_k \sum_j |x_{jk}| < +\infty \right)$
 // ~~S~~

② $\forall j$ finito

$\sum_k x_{jk}$ è ASS. CV

$\left(\sum_k |x_{jk}| \leq \sum_k \sum_i |x_{ik}| < +\infty \right)$
 (*)

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_k x_{jk}$$

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} : |S - S_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq M$

$$|S - S_n| = \left| \sum_k \sum_j x_{jk} - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_k x_{jk} \right|$$

$$= \left| \sum_k \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_{jk} - \sum_{j=0}^{n-1} x_{jk} \right) \right|$$

$$= \left| \sum_k \sum_{j=n}^{\infty} x_{jk} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=n}^{\infty} x_{jk} \right| + \left| \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} x_{jk} \right| = (*)$$

dove
N tale che

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sum_j |x_{jk}| < \varepsilon/2$$

$$\forall k < N \quad \exists m_k : \sum_{j=m_k}^{\infty} |x_{jk}| < \frac{\varepsilon}{2N}$$

$$M \doteq \max (m_k : k < N)$$

$$(*) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=n}^{\infty} |x_{jk}| + \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} |x_{jk}|$$

per @
se $n \geq M$

$\leq \frac{\varepsilon}{2N}$

$\leq \varepsilon/2$



$\leq$

$$\cancel{N} \frac{\varepsilon}{\cancel{2N}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\nearrow$
Se $n \geq N$

